

Міністерство освіти і науки України
Херсонський національний технічний університет

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

№1

ХЕРСОН, 2018

ПРИКЛАДНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

**Херсонський національний
технічний університет**

Відповідальний за випуск	Хомченко Анатолій Никифорович, д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України
Технічний редактор	Литвиненко Олена Іванівна к.т.н., доцент
Макетування	Омельчук А.А.

Свідоцтво про державну реєстрацію засобу масової інформації –
серія КВ № 17371-6141 от 17.12.2010

Підписано до друку 29.08.2018 р. Формат 60x84/8. Папір офсетний.
Ум. друк. аркушів 21.62. Замовлення № 18. Тираж 120 прим.

Матеріали друкуються в авторській редакції.
Відповідальність за достовірність даних, зазначених у статтях,
несуть їх автори.

© Херсонський національний технічний університет 2018

Видавництво та друк: «ОЛДІ-ПЛЮС»
73033, м. Херсон, а/с 15
E-mail: oldi-ks@i.ua
Свід. ХС № 2 від 16.08.2000 р.

Редакційна рада

Головний редактор

Бардачов Ю.М.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,
ректор Херсонського національного технічного університету.

Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,
перший проректор Херсонського національного технічного університету.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., професор, заслужений діяч науки і техніки України,
завідувач кафедри прикладної і вищої математики Чорноморського
національного університету ім. П. Могили.

Відповідальний секретар

Омельчук А.А.

к.т.н., ст. викладач кафедри технічної кібернетики Херсонського національного
технічного університету.

Редакційна колегія

Іноземні фахівці

Бабічев С.О.

Гучек П.Й.

к.т.н., доцент (Чехія)

д.т.н., доцент (Польща)

Автоматизація процесів керування

Алексєєв М.О.

Бардачов Ю.М.

Головко В.І.

Кондратець В.О.

Мещеряков Л.І.

Осадчий С.І.

Рожков С.О.

Рудакова Г.В.

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

д.т.н., професор

Інформаційні технології

Аль-Амморі А.Н.	д.т.н., професор
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Литвиненко О.І.	к.т.н., доцент
Стеценко І.В.	д.т.н., професор
Томашевський В.М.	д.т.н., професор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., професор
Якунін А.О.	д.т.н., професор

Прикладна геометрія, інженерна графіка

Борисенко В.Д.	д.т.н., професор
Ванін В.В.	д.т.н., професор
Вірченко Г.А.	д.т.н., професор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., професор
Гумен О.М.	д.т.н., професор
Корчинський В.М.	д.т.н., професор
Мартин Є.В.	д.т.н., професор
Найдиш А.В.	д.т.н., професор
Несвідомін В.М.	д.т.н., професор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., професор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., професор
Устенко С.А.	д.т.н., професор
Шоман О.В.	д.т.н., професор

Інші спеціальності

Астіоненко І.О.	к.ф.-м.н., доцент
Крак Ю.В.	д.ф.-м.н., професор
Литвиненко В.І.	д.т.н., професор
Ляшенко В.П.	д.т.н., професор
Мельник І.В.	д.т.н., професор
Мороз Б.І.	д.т.н., професор
Різник В.В.	д.т.н., професор
Розов Ю.Г.	д.т.н., професор
Хомченко А.Н.	д.ф.-м.н., професор

Редакционный совет

Главный редактор

Бардачев Ю.Н.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,
ректор Херсонского национального технического университета.

Заступники головного редактора

Розов Ю.Г.

д.т.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,
первый проректор Херсонского национального технического университета.

Хомченко А.Н.

д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки и техники Украины,
заведующий кафедрой прикладной и высшей математики Черноморского
национального университета им. П. Могилы.

Ответственный секретарь

Омельчук А.А.

к.т.н., ст. преподаватель кафедры технической кибернетики Херсонского
национального технического университета.

Редакционная коллегия

Иностранные специалисты

Бабичев С.А.

Гучек П.И.

к.т.н., доцент (Чехия)

д.т.н., доцент (Польша)

Автоматизация процессов управления

Алексеев М.А.

Бардачев Ю.Н.

Головко В.И.

Кондратец В.А.

Мещеряков Л.И.

Осадчий С.И.

Рожков С.А.

Рудакова А.В.

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

д.т.н., профессор

Информационные технологии

Аль-Аммори А.Н.	д.т.н., профессор
Бень А.П.	к.т.н., доцент
Литвиненко Е.И.	к.т.н., доцент
Стеценко И.В.	д.т.н., профессор
Томашевский В.Н.	д.т.н., профессор
Шерстюк В.Г.	д.т.н., профессор
Якунин А.А.	д.т.н., профессор

Прикладная геометрия, инженерная графика

Борисенко В.Д.	д.т.н., профессор
Ванин В.В.	д.т.н., профессор
Вирченко Г.А.	д.т.н., профессор
Гнатушенко В.В.	д.т.н., профессор
Гумен О.Н.	д.т.н., профессор
Корчинский В.М.	д.т.н., профессор
Мартин Е.В.	д.т.н., профессор
Найдыш А.В.	д.т.н., профессор
Несвидомин В.Н.	д.т.н., профессор
Пилипака С.Ф.	д.т.н., профессор
Тулученко Г.Я.	д.т.н., профессор
Устенко С.А.	д.т.н., профессор
Шоман О.В.	д.т.н., профессор

Другие специальности

Астионенко И.А.	к.ф.-м.н., доцент
Крак Ю.В.	д.ф.-м.н., профессор
Литвиненко В.И.	д.т.н., профессор
Ляшенко В.П.	д.т.н., профессор
Мельник И.В.	д.т.н., профессор
Мороз Б.И.	д.т.н., профессор
Ризник В.В.	д.т.н., профессор
Розов Ю.Г.	д.т.н., профессор
Хомченко А.Н.	д.ф.-м.н., профессор

Editorial Board

Editor-in-Chief

Bardachov Yu.M.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,
Rector of Kherson National Technical University

Deputies Editor-in-Chief

Rozov Yu.H.

Doctor of Engineering Science, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,
First Vice-Rector of Kherson National Technical University

Khomchenko A.N.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,
Head of the Department of Applied and Higher Mathematics of the Petro Mohyla Black Sea National University.

Executive Secretary

Omelchuk A.A.

Ph.D., Senior Lecturer of the Department of Technical Cybernetics of Kherson National Technical University.

Members of Editorial Board

Foreign Specialists

Babichev S.O.

Huchek P.Y.

Ph.D., Associate Professor (Czech Republic)

Doctor of Engineering Science, Associate Professor (Republic of Poland)

Automation of Control Processes

Aleksieiev M.O.

Bardachov Yu.M.

Holovko V.I.

Kondratets V.O.

Meshcheriakov L.I.

Osadchyi S.I.

Rozhkov S.O.

Rudakova H.V.

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Doctor of Engineering Science, Professor

Information Technology

Al-Ammori A.N.	Doctor of Engineering Science, Professor
Ben A.P.	Ph.D., Associate Professor
Lytvynenko O.I.	Ph.D., Associate Professor
Stetsenko I.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Tomashevskiy V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Sherstiuk V.H.	Doctor of Engineering Science, Professor
Yakunin A.O.	Doctor of Engineering Science, Professor

Applied Geometry, Engineering Graphics

Borysenko V.D.	Doctor of Engineering Science, Professor
Vanin V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Virchenko H.A.	Doctor of Engineering Science, Professor
Hnatushenko V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Humen O.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Korchynskiy V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Martyn Ye.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Naidysh A.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Nesvidomin V.M.	Doctor of Engineering Science, Professor
Pylypaka S.F.	Doctor of Engineering Science, Professor
Tuluchenko H.Ya.	Doctor of Engineering Science, Professor
Ustenko S.A.	Doctor of Engineering Science, Professor
Shoman O.V.	Doctor of Engineering Science, Professor

Other Specialties

Astionenko I.O.	Ph.D., Associate Professor
Krak Yu.V.	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Lytvynenko V.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Liashenko V.P.	Doctor of Engineering Science, Professor
Melnyk I.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Moroz B.I.	Doctor of Engineering Science, Professor
Riznyk V.V.	Doctor of Engineering Science, Professor
Rozov Yu.H.	Doctor of Engineering Science, Professor
Khomchenko A.N.	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

ЗМІСТ

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

Карасєв А.О., Стрельникова О.О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу.....	10
Кузьмич В.І., Валько М.І., Валько П.М., Яковенко Т.О. Про спільну точку операторів	19
Човнюк Ю.В., Броварець О.О. Моделювання і аналіз ефективних електромагнітних біанізотропних/біізотропних параметрів капілярних систем електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення як біооб'єктів	27

ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Бардачов Ю.М., Тулущенко Г.Я. Чисельне розв'язання задачі Вебера із застосуванням сплайнової апроксимації	49
Гумен О.М., Лясковська С.Є., Мартин Є.В. Достатність проєкційних зображень 1-багатовидів n-просторів стану технічних систем	58
Найдиш А.В., Спірінцев Д.В., Лазаренко М.В. Розробка технології проєктування та виготовлення робочих коліс турбокомпресора	68
Несвідоміна О.В. Відображення растрових зображень на плоскі ізометричні сітки	75
Пилипака С.Ф., Грищенко І.Ю., Креса Т.А. Моделювання смуг розгортних поверхонь, дотичних до поверхні кулі	81
Протектор Д.О. Безсітковий підхід при комп'ютерному моделюванні двовимірних нестационарних задач теплопровідності з використанням атомарних радіальних базисних функцій	89

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ І ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Ковч О.І., Стрельникова О.О. Аналіз схем прикладання навантажень при моделюванні міцності зварних швів з урахуванням взаємного впливу різних дефектів.....	99
Крютченко Д.В. Комп'ютерне моделювання вимушених коливань рідини в призматичному резервуарі	107
Килинник В.Ю., Гнітько В.І., Науменко Ю.В., Розова Л.В. Чисельне моделювання коливань рідини в складених оболонках обертання при перевантаженнях	115
Хомченко А.Н., Литвиненко О.І., Астіоненко І.О., Гучек П.И. Квазіметод Монте-Карло і кубатури для серендипових поліномів	122

ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

Єдинович М.Б., Байрак І.В., Карпенко С.Л. Застосування моделей дискретних автоматів при програмуванні програмованих логічних контролерів	128
Луб'яний П.В., Селіверстов І.А., Калімбет Р.В. Організація управління роботою маршрутної системи міста на основі оцінки якості перевезень пасажирів	136
Мартинів В.Л., Вірченко Г.А. Визначення раціональної орієнтації вікон енергоефективних будівель кампусів	143
Омельчук А.А., Лебеденко Ю.О., Поливода О.В. Комп'ютеризовані системи управління у інтегрованих пташиних і рибних господарствах.....	150
Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Кобець М.С. Вибір робочої частоти генератора при моніторингу і контролі процесів вологопереносу у музейних експонатах/картинах методом поглинання НВЧ/КВЧ енергії	158

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Климович А.Н., Шуть В.Н. Адаптивний алгоритм управління перехрестком на основі оптимізації настройки дорожньої разметки	168
Хошаба О.М. Дослідження процесів навантажувальних впливів і відновлення продуктивності обчислювальних систем	178

УДК 517.98

В.І. КУЗЬМИЧ

Херсонський державний університет

М.І. ВАЛЬКО, П.М. ВАЛЬКО, Т.О. ЯКОВЕНКО

Херсонський національний технічний університет

ПРО СПІЛЬНУ ТОЧКУ ОПЕРАТОРІВ

Робота продовжує дослідження класичного принципу стискаючого відображення. Цей принцип має численні теоретичні та практичні застосування у різноманітних областях математики. Отримані результати вказують на те, що класичні результати можна розповсюдити на випадок декількох операторів, маючи на увазі існування спільної для них точки. Крім того, в окремих випадках, умову того, що оператор повинен робити стискаюче відображення, можна ослабити. Для цього його достатньо розбити на декілька простих операторів і шукати спільну точку цих операторів. Зокрема, у роботі доведена теорема про існування спільної точки двох операторів, що відображають повний метричний простір на себе. При цьому, між образами, що створюють ці оператори, повинно виконуватись певне співвідношення, яке аналогічне умові стискаючого відображення. Аналогічний результат встановлено і для випадку, коли між образами операторів виконується умова, протилежна умові стискаючого відображення.

Ключові слова: метричний простір, оператор, стискаюче відображення, нерухома точка оператора.

В.И. КУЗЬМИЧ

Херсонский государственный университет

Н.И. ВАЛЬКО, П.Н. ВАЛЬКО, Т.А. ЯКОВЕНКО

Херсонский национальный технический университет

ОБ ОБЩЕЙ ТОЧКЕ ОПЕРАТОРОВ

Работа продолжает исследования классического принципа сжимающего отображения. Этот принцип имеет многочисленные теоретические и практические применения в различных областях математики. Полученные результаты указывают на то, что классические результаты можно распространить на случай нескольких операторов, имея в виду существование общей для них точки. Кроме того, в отдельных случаях, условие того, что оператор должен делать сжимающее отображение, можно ослабить. Для этого его достаточно разбить на несколько простых операторов и искать общие точки этих операторов. В частности, в работе доказана теорема о существовании общей точки двух операторов, отражающие полное метрическое пространство на себя. При этом между образами, которые создают эти операторы, должно выполняться определенное соотношение, аналогичное условию сжимающего отображения. Аналогичный результат установлен и для случая, когда между образами операторов выполняется условие, противоположное условию сжимающего отображения.

Ключевые слова: метрическое пространство, оператор, сжимающее отображение, неподвижная точка оператора.

V.I. KUZMYCH
Kherson State University
M.I. VALKO, P.M. VALKO, T.O. YAKOVENKO
Kherson National Technical University

ABOUT THE GENERAL POINT OF OPERATORS

The work continues the study of the classical principle of contraction mapping. This principle has numerous theoretical and practical applications in various fields of mathematics. The results obtained indicate that classical results can be extended to the case of several operators, bearing in mind the existence of a common point for them. In addition, in some cases, the condition that the operator must make a contraction mapping can be weakened. To do this, it is enough to break it into several simple operators and look for common points of these operators. In particular, we prove a theorem on the existence of a common point of two operators that reflect a complete metric space on itself. In this case, between the images that these operators create, a certain relationship must be satisfied, which is analogous to the condition of the contracting mapping. A similar result is established for the case when the condition opposite to the condition of the contracting mapping is fulfilled between the images of the operators.

In applications of the method of successive approximation, a situation often arises when the operator carrying out the reflection of the total space on himself does not satisfy the classical condition for the compression operator. Sometimes you can use the inverse operator if it exists. In some cases, this inconvenience can be bypassed by conducting certain analytical transformations. In particular, majorant operators of contraction can be used. In the work, a sufficient condition is established for the use of such operators to search for a fixed point of an operator that is not a compression operator. This result can also be used in the case where the operator is not continuous. The graphic diagrams of application of the method of successive approximation in the above cases are presented in the work.

The results obtained in the work can be used to search for fixed points of individual operators, which are not compression operators, but allow for their replacement by simpler operators that or either have an inverse operator or are compression operators.

Keywords: metric space, operator, contracting map, fixed point of the operator.

Постановка проблеми

Потреби практичної діяльності людини обумовили виникнення спеціальних наукових методів, основою яких є математичні. Математичні методи дослідження широко проникають у різні сфери сучасної науки – економіки, фізики, екології, соціології, прикладної лінгвістики, природознавства тощо, які розвиваються на зламі кількох наукових напрямів. Важливою, невід’ємною частиною таких досліджень є обробка експериментальних даних з використанням математичної статистики, створення математичних моделей та їх систем для опису явищ, чинників певного середовища та їх взаємодії. Одним із найефективніших методів побудови математичних моделей, що описують динаміку фізичних, хімічних, екологічних, біологічних, технологічних систем як між окремими їх елементами, так і зовнішніми факторами середовища, в якому перебувають ці елементи, є використання методів теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Класичними задачами такого типу є, наприклад, задачі про охолодження тіла, радіоактивний розпад, поперечні коливання натягнутої струни, швидкість розмноження бактерій, збільшення кількості ферменту, концентрацію розчину, швидкість хімічної реакції, динаміку чисельності популяції, теорію епідемій, ріст дерева та листя на ньому та багато інших.

У задачах знаходження точного або наближеного розв'язку диференціального або інтегрального рівнянь важливим етапом є доведення існування цього розв'язку. Одним із найуживаніших методів дослідження цих рівнянь на існування розв'язку є метод, що опирається на класичну теорему Каччіополлі-Банаха про оператор стискування. Цей оператор є неперервним і має єдину нерухому точку, знаходження якої проводиться методом послідовних наближень [1, С. 605-606]. Якщо оператор, який відповідає досліджуваному рівнянню, не є оператором стискування, то пошук розв'язку ускладнюється. З іншого боку, диференціальне або інтегральне рівняння можна записати у вигляді рівності двох операторів, а пошук розв'язку цього рівняння привести до пошуку точки, в якій обидва оператори приймають однакове значення, тобто до пошуку спільної точки операторів. Особливо це зручно, якщо кожен з отриманих операторів простіший ніж досліджуваний оператор.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Оператори стискування широко використовуються в теоремах про існування розв'язків диференціальних та інтегральних рівнянь [1, С. 620-629], [2, С. 465-470]. Існують теореми і методи пошуку нерухомих точок оператора, які не використовують умови теореми Каччіополлі-Банаха. Це, наприклад, принцип Шаудера [1, С. 616], теорема Какутані [1, С. 630], яку використовують у теорії ігор. Однак, вони справедливі лише на компактних просторах, та істотно використовують властивості неперервності або замкнутості оператора. У роботах [3], [4] і [5] були отримані умови, що розширюють межі застосування принципу стискаючого відображення.

Мета дослідження

Метою цієї роботи є визначення умов, достатніх для існування спільної точки двох операторів, які відображають повний метричний простір на себе, а також побудова методу пошуку цієї точки.

Викладення основного матеріалу дослідження

Надалі будемо розглядати повний метричний простір X з метрикою ρ в ньому. Спільною точкою двох операторів u і v , які означені на просторі X , будемо називати таку точку x^* цього простору, в якій виконується рівність $u(x^*) = v(x^*)$.

Теорема 1. *Нехай оператори u і v відображають повний метричний простір X на себе, і для оператора v на цьому просторі існує обернений оператор.*

Якщо для довільних точок x' і x'' простору X виконується нерівність

$$\rho(u(x'); u(x'')) \leq \alpha \rho(v(x'); v(x'')), \quad (1)$$

де $0 \leq \alpha < 1$, то існує єдина спільна точка операторів u і v .

Доведення. Візьмемо довільну точку x_0 простору X і знайдемо точку x_1 з рівняння $v(x_1) = u(x_0)$. Оскільки за умовою теореми оператор v відображає простір X на себе і для нього існує обернений оператор v^{-1} , то така точка x_1 існує, причому вона єдина і знаходиться за формулою $x_1 = v^{-1}(u(x_0))$. Аналогічно, з рівності $v(x_2) = u(x_1)$ знаходимо точку x_2 : $x_2 = v^{-1}(u(x_1))$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, з рівності:

$$v(x_n) = u(x_{n-1}) \quad (2)$$

будуємо послідовність $\{x_n\}$ точок $x_n = v^{-1}(u(x_{n-1}))$, $n = 1, 2, \dots$. З огляду на рівність (2), з нерівності (1) послідовно отримуємо:

$$\begin{aligned} \rho(v(x_2); v(x_1)) &= \rho(u(x_1); u(x_0)) \leq \alpha \rho(v(x_1); v(x_0)), \\ \rho(v(x_3); v(x_2)) &= \rho(u(x_2); u(x_1)) \leq \alpha \rho(v(x_2); v(x_1)) \leq \alpha^2 \rho(v(x_1); v(x_0)), \\ &\dots\dots\dots \\ \rho(v(x_n); v(x_{n-1})) &\leq \alpha^{n-1} \rho(v(x_1); v(x_0)), \\ &\dots\dots\dots, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

З цих нерівностей випливає, що послідовність $\{v(x_n)\}$ є збіжною в собі [1, С. 606], і, внаслідок повноти простору X , збігається до деякої точки x' цього простору. З рівності (2) отримуємо, що послідовність $\{u(x_n)\}$ теж збігається до точки x' .

Нехай точка x^* простору X така, що $v(x^*) = x'$. Тоді з нерівності (1) для цієї точки отримаємо нерівність:

$$\rho(u(x_n); u(x^*)) \leq \alpha \rho(v(x_n); v(x^*)) = \alpha \rho(v(x_n); x').$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо: $\rho(x'; u(x^*)) \leq \alpha \rho(x'; x') = 0$.

Таким чином, справедлива рівність: $u(x^*) = x'$ і, отже, x^* - спільна точка операторів u і v . Єдиність цієї точки можна отримати з нерівності (1), так само, як і при доведенні теореми Каччіополлі-Банаха.

Якщо в умови Теореми 1 в якості оператора v взяти одиничний оператор: $v(x) = x$ для будь-якої точки x простору X , то отримаємо вищезгадану теорему Каччіополлі-Банаха про нерухому точку оператора стискування. В цьому випадку оператор u , за теоремою Каччіополлі-Банаха, буде неперервним у кожній точці простору X .

Приклад побудови послідовних наближень, у разі, якщо $u = k_1 x, v = k_2 x$ ($k_1 < k_2$), показаний на рис. 1.

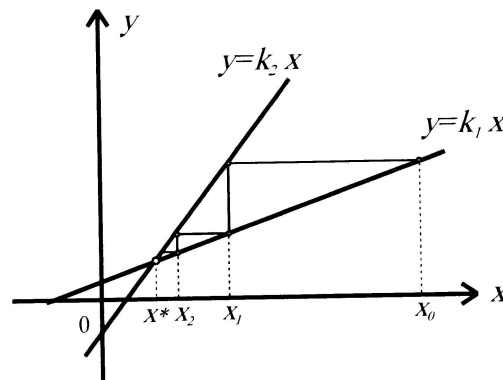


Рис. 1. Схема послідовних наближень до спільної точки.

Умова (1), взагалі кажучи, не обов'язкова для існування спільної точки двох операторів. На це вказує наступний результат.

Теорема 2. Нехай оператори u і v відображають повний метричний простір X на себе, і для оператора v на цьому просторі існує обернений оператор.

Якщо для довільних точок x' і x'' простору X виконується нерівність

$$\rho(u(x'); u(x'')) \geq \alpha \rho(v(x'); v(x'')), \tag{3}$$

де $\alpha > 1$, то існує єдина спільна точка операторів u і v .

Доведення. З нерівності (3) випливає, що для оператора u на просторі X існує обернений оператор u^{-1} . Дійсно, за умовою теореми 2 оператор u відображає простір X на себе. Припустимо, що у двох різних точках x' і x'' простору оператор u приймає однакове значення: $u(x') = u(x'') = x$ і $\rho(x'; x'') \neq 0$. Тоді з нерівності (3) для цих точок отримаємо:

$$\rho(u(x'); u(x'')) = \rho(x; x) \geq \alpha \rho(v(x'); v(x'')),$$

або $\rho(v(x'); v(x'')) = 0$. Отже, оператор v в точках x' і x'' теж приймає однакове значення, що суперечить умові існування оберненого оператора. З нерівності (3) знаходимо:

$$\rho(v(x'); v(x'')) \leq \frac{1}{\alpha} \rho(u(x'); u(x'')), \quad (4)$$

Так як справедливі нерівності $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, то, з огляду на нерівність (4), маємо, що оператори u і v задовольняють умови теореми 1, тому для них існує єдина спільна точка.

Якщо в умові Теореми 2 в якості оператора v взяти одиничний оператор, то умова (3) набере вигляду:

$$\rho(u(x'); u(x'')) \geq \alpha \rho(x'; x''). \quad (5)$$

У цьому випадку, Лема 1 роботи [4, С. 167] є частинним випадком Теореми 2. Наведемо приклад оператора, що задовольняє умову (5).

Приклад 1. Розглянемо повний метричний простір R_0^2 [6, С. 43], точками якого є упорядковані пари дійсних чисел: $x(x_1; x_2)$. Відстань між точками $x'(x'_1; x'_2)$ та $x''(x''_1; x''_2)$ цього простору означається за допомогою рівності: $\rho(x'; x'') = \max_{1 \leq k \leq 2} \{|x'_k - x''_k|\}$.

Матричний оператор $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ відображає простір R_0^2 на себе за правилом: $u(x) = y(y_0; y_2)$, де $y_i = \sum_{k=1}^2 u_{ik} x_k$ ($i = 1, 2$). Для того, щоб оператор u був оператором стискування, необхідно і достатньо, щоб для деякого числа α виконувались нерівності: $\sum_{k=1}^2 |u_{ik}| \leq \alpha < 1$ ($i = 1, 2$) [6, С. 66-67].

Оператор $u = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ не задовольняє вказаній вище умові, і тому не є оператором стискування. З іншого боку, цей оператор задовольняє умову (5), якщо покласти: $\alpha = 2 > 1$. Отже, за Теоремою 2, для цього оператора існує єдина спільна точка з одиничним оператором, тобто нерухома точка оператора u .

Знайдемо нерухому точку оператора u методом послідовних наближень. Для цього використаємо обернений оператор: $u^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$. Наближення розпочнемо, наприклад, з точки $x_0(1; 1)$. Застосувавши послідовно n разів обернений оператор, за правилом: $x_{n+1} = u^{-1}(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), отримаємо послідовність $\{x_n\}$ точок $x_n = (u^{-1})^n(x_0) = (u^n)^{-1}(x_0)$. Далі будемо мати:

$u^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, $(u^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix}$. Тепер знаходимо елементи послідовності:

$$x_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 0,5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5^n \\ 0,5^n \end{pmatrix} (n = 1, 2, \dots).$$

Перейшовши у цій рівності до границі при $n \rightarrow \infty$, отримуємо нерухому точку: $x^*(0; 0)$.

Використовуючи теореми 1 і 2, можна робити висновок про існування спільної точки трьох операторів.

Наслідок 1. Якщо для операторів u і v , що задовольняють умови теореми 1, або теореми 2, і для оператора f , що відображає повний метричний простір X на себе, виконується рівність:

$$\rho(u(x); f(x)) + \rho(f(x); v(x)) = \rho(u(x); v(x)) \quad (6)$$

в кожній точці x простору X , то оператори u , v і f мають єдину спільну точку.

Доведення. За Теоремою 1 або 2 оператори u і v мають єдину спільну точку x^* в просторі X . Тобто, справедлива рівність: $u(x^*) = v(x^*)$. Для цієї точки рівність (6) набуде вигляду:

$\rho(u(x^*); f(x^*)) + \rho(f(x^*); v(x^*)) = \rho(u(x^*); v(x^*))$, або $\rho(v(x^*); f(x^*)) = 0$. Тому справедлива рівність: $v(x^*) = f(x^*)$, і точка x^* є спільною точкою операторів v і f , а отже, і операторів u , v і f .

Наслідок 1, по аналогії з властивістю границі проміжної послідовності, можна було б назвати властивістю спільної точки проміжного оператора.

Наслідок 2. Якщо оператор стискування u і оператор f , що відображають повний метричний простір X на себе, задовольняють рівність:

$$\rho(u(x); f(x)) + \rho(f(x); x) = \rho(u(x); x) \quad (7)$$

для будь-якої точки x простору X , то оператор f має єдину нерухому точку.

Доведення. Цей наслідок отримуємо з Наслідку 1, вибравши в якості оператора v одиничний оператор: $v(x) = x$.

Наслідок 2 цікавий тим, що оператор f не обов'язково повинен бути оператором стискування, або мати обернений оператор. Однак, якщо припустити неперервність оператора u в нерухомій точці, то можна зробити висновок і про неперервність оператора f у цій точці.

Теорема 3. Нехай оператор u і оператор f відображають повний метричний простір X на себе. Нехай, крім того, оператор u має нерухому точку x^* у просторі X , і є неперервним у цій точці.

Якщо у кожній точці простору X виконується рівність (7), то оператор f є неперервним у точці x^* , і вона є для нього нерухомою точкою.

Доведення. Нехай точка x^* є нерухомою точкою оператора u . У цьому випадку буде виконуватись рівність: $u(x^*) = x^*$. Підставивши це значення у рівність (7), будемо мати:

$$\begin{aligned} \rho(u(x^*); f(x^*)) + \rho(f(x^*); x^*) &= \rho(x^*; f(x^*)) + \rho(f(x^*); x^*) = \\ &= 2\rho(x^*; f(x^*)) = \rho(u(x^*); x^*) = \rho(x^*; x^*) = 0. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо рівність: $\rho(x^*; f(x^*)) = 0$, а це означає, що точка x^* є нерухомою точкою оператора f .

Для доведення неперервності оператора f у точці x^* візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}$ точок простору X , що збігається до точки x^* . Для довільного елемента x_n цієї послідовності виконується рівність (7):

$$\rho(u(x_n); f(x_n)) + \rho(f(x_n); x_n) = \rho(u(x_n); x_n).$$

З цієї рівності знаходимо:

$$\rho(f(x_n); x_n) = \rho(u(x_n); x_n) - \rho(u(x_n); f(x_n)) \leq \rho(u(x_n); x_n).$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при $n \rightarrow \infty$, і використовуючи неперервність оператора u в точці x^* , будемо мати:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u(x_n); x_n) = \rho(x^*; x^*) = 0.$$

Використаємо нерівність трикутника: $\rho(f(x_n); x^*) \leq \rho(f(x_n); x_n) + \rho(x_n; x^*)$.
Перейшовши у цій нерівності до границі при $n \rightarrow \infty$, і використавши при цьому попередню нерівність, будемо мати:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n; x^*) = 0.$$

Оскільки відстань є невід'ємною величиною, то отримана нерівність означає справедливість рівності: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n); x^*) = 0$, а це, внаслідок збіжності послідовності $\{x_n\}$ до точки x^* , означає неперервність оператора f у цій точці.

Сутність Теорема 3 можна графічно продемонструвати на прикладі функції $u(x) = kx$ ($k > 1$), та функції $f(x)$, що задовольняє нерівності: $x < f(x) < u(x)$ (рис. 2).

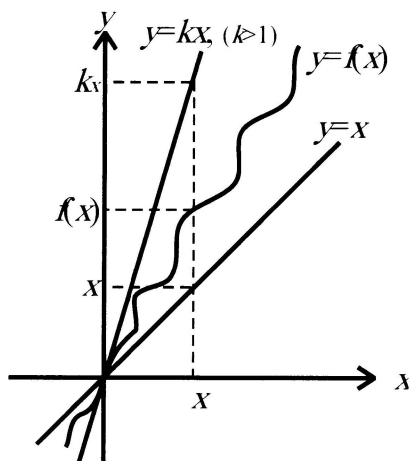


Рис. 2. Властивість спільної точки проміжного оператора.

У цьому випадку, за метрикою простору R^1 , рівність (7) буде мати вигляд:

$$\rho(u(x); f(x)) + \rho(f(x); x) = |kx - f(x)| + |f(x) - x| = |kx - x| = \rho(u(x); x).$$

Таким чином, рівність (7) виконується, і отже функція $f(x)$ має, як і функція $u(x) = kx$, нерухому точку $x = 0$.

Висновки

При дослідженні існування розв'язку диференціальних та інтегральних рівнянь відповідні оператори, у випадку, якщо вони не є операторами стискування, можна розбивати на декілька більш простих операторів і шукати їхню спільну точку. Якщо оператор f не є неперервним і не має оберненого, то можна шукати такий оператор стискування u , щоб вони обидва задовольняли рівність (6), а потім шукати нерухому точку оператора u . За Наслідком 1 ця точка буде нерухомою точкою оператора f .

У подальшому важливо, використовуючи результати роботи, отримати нові умови існування і єдиності розв'язків конкретних типів диференціальних та інтегральних рівнянь.

Список використаної літератури

1. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
3. Кузьмич В.И. Дополнение к теореме Банаха об операторе сжатия / В.И. Кузьмич // Труды XII международного симпозиума "Методы дискретных особенностей в задачах математической физики". – Харьков-Херсон, 2005. – С. 189-192.
4. Кузьмич В.И. О неподвижной точке оператора / В.И. Кузьмич // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. Харків, 2005. – № 661. – Вип. 4. – С. 167-173.
5. Кузьмич В.И. Об общей точке операторов / В.И. Кузьмич // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности Сб. науч. тр. – СПб.: Санкт-Петербургское отделение МАН ВШ, 2005. – С. 58-61.
6. Колмогоров А.М. Элементы теории функций и функционального анализа / А.М. Колмогоров, С.В. Фомин. – К.: Видавниче об'єднання "Вища школа", 1974. – 456 с.

References

1. Kantorovich L.V., Akilov G.P. (1977). *Funktsionalnyi analiz*. M.: Nauka (in Russ.)
2. Natanson I.P. (1974). *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi*. M.: Nauka (in Russ.)
3. Kuzmich V.I. (2005). Dopolnenie k teoreme Banakha ob opereatore szhatiia. *Trudy XII mezhdunarodnogo simpoziuma "Metody diskretnykh osobennostei v zadachakh matematicheskoi fiziki"*, 189-192. Kharkov-Kherson (in Russ.)
4. Kuzmich V.I. (2005). O nepodvizhnoi tochke operatora. *Visnuk Kharkivskogo natsionalnogo universytetu. Serii: Matematychni modeliuvannia. Informatsiini tekhnologii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia*, 666(4), 167-173 (in Russ.)
5. Kuzmich V.I. (2005). Ob obshchei tochke operatora. *Matematicheskoe modelirovanie v obrazovanii, nauke i promyshlennosti. Sbornik nauchnykh trudov*, 58-61. SPb.: Sankt-Peterburgskoe otdelenie MAN VSH (in Russ.)
6. Kolmogorov A.M., Fomin S.V. (1974). *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analizu*. K.: Vyshcha shkola (in Ukr.)