ВІСНИК

Харківського національного
університету

№ 661

Харків
2005

ISSN 0453–8048

Міністерство освіти та науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного університету

№ 661

Серія

«Математичне моделювання.
Інформаційні технології.
Автоматизовані системи управління»

Випуск 4

Харків
2005

УДК 519.6+004.652/.942+519.217:681.3+621.793.184.06+378.1:159.816

До випуску увійшли статті, присвячені дослідженням у галузі математичного моделювання, інформаційних технологій та автоматизованих систем управління.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних напрямках

Адреса редакційної колегії: 61077, м. Харків, пл. Свободи, 4,
ХНУ імені В. Н. Каразіна, каф. Математичної фізики та обчислювальної математики, к.6-28
Тел. +38 (057) 707-52-02, Email: Victor.O.Mischenko@univer.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (Протокол №7 від 27.05.05)

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»
№ 661, 2005, с.167-173
УДК 517.98

О неподвижной точке оператора

В. И. Кузьмич
Херсонский государственный университет, Украина

In work conditions, sufficient are received that the operator, not being the operator of compression, had a motionless point. In particular, the so-called operator of a stretching for whom there is a return operator of compression is considered.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Известная теорема Банаха о неподвижной точке оператора сжатия [1, с.605-606] дает достаточное условие для существования и единственности неподвижной точки оператора, отображающего полное метрическое пространство на себя, а также дает метод поиска такой точки – метод последовательных приближений. Это условие имеет вид:

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) \le \alpha_i \rho\big(x';x''\big), \qquad (1)$$

где $0 \le \alpha < 1$, а x' и x'' - произвольные точки пространства.

2. Истоки исследования авторов

Операторы сжатия широко используются в теоремах о существовании решений дифференциальных и интегральных уравнений [1, с.620-629], [2, с.465-470]. Существуют и другие теоремы о неподвижной точке оператора. Например, известный принцип Шаудера [1, с. 616], или более общая теорема Какутани [1, с.630]. Эти теоремы не используют условие (1), однако они справедливы лишь на компактных множествах. Если же пространство некомпактно, условие (1) не выполняется, а оператор, как это часто встречается в приложениях, не имеет обратного и даже не является непрерывным, то поиск неподвижной точки сопряжен со значительными трудностями.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Данная работа посвящена получению достаточных условий существования неподвижной точки именно для таких операторов. Полученный результат, на наш взгляд, может дополнить упомянутую выше теорему Банаха.

4. Основная часть

Для получения основного результата докажем вначале два вспомогательных утверждения, которые, впрочем, могут представлять и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Пусть оператор u отображает полное метрическое пространство X на себя. Если для произвольных точек x' и x'' пространства X выполняется неравенство

$$\rho\big(u(x');u(x'')\big) \ge \alpha\rho\big(x';x''\big), \qquad (2)$$

где $\alpha > 1$, то оператор u имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить методом последовательных приближений.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий Леммы 1 для оператора u будет существовать обратный оператор u^{-1}. Действительно, любая точка $x \in X$ является значением оператора u в некоторой точке $x^* \in X$: $u(x^*) = x$. Предположим, что это значение оператор принимает еще в одной точке $x^{**} \in X$, отличной от x^*, т.е. $u(x^*) = u(x^{**}) = x$ и $\rho(x^*; x^{**}) \neq 0$. Тогда, принимая во внимание неравенство (2), для точек x^* и x^{**} получим:

$$\rho\big(u(x^*); u(x^{**})\big) = \rho(x; x) \geq \alpha\rho(x^*; x^{**}),$$

или

$$\alpha\rho(x^*; x^{**}) \leq 0; \quad \rho(x^*; x^{**}) = 0.$$

Поэтому $x^* = x^{**}$, что противоречит предположению.

Таким образом, для каждой точки $x \in X$ существует единственная точка $x^* \in X$ такая, что $x = u(x^*)$. А это означает, что для оператора u на пространстве X существует обратный оператор u^{-1}.

Для произвольных точек x' и x'' пространства X обозначим: $u(x') = x^*$ и $u(x'') = x^{**}$. Тогда неравенство (2) примет вид:

$$\rho(x^*; x^{**}) = \rho\big(u(x'); u(x'')\big) \geq \alpha\rho\big(u^{-1}(x^*); u^{-1}(x^{**})\big),$$

откуда находим:

$$\rho\big(u^{-1}(x^*); u^{-1}(x^{**})\big) \leq \frac{1}{\alpha}\rho\big(x^*; x^{**}\big). \tag{3}$$

Поскольку $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$, то из неравенства (3) следует, что оператор u^{-1} удовлетворяет неравенству (1) и, следовательно, является оператором сжатия. По теореме Банаха для оператора u^{-1} существует единственная неподвижная точка $x \in X$ такая, что $u^{-1}(x) = x$. Но поскольку оператор u^{-1} обратный оператору u, то выполняется равенство $u(x) = x$, то есть точка x является также неподвижной точкой оператора u. Эта точка единственная и ее можно получить методом последовательных приближений, как предел последовательности точек $x_{n+1} = u^{-1}(x_0)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, где x_0 - произвольная точка пространства X [1, с. 605-606]. Лемма доказана.

Оператор, удовлетворяющий условию (2), логично назвать оператором растяжения. Для случая, когда $X = R^1$ и функция $y = f(x)$ такова, что $f'(x) > 1$, ход последовательных приближений с неподвижной точкой x^* показан на рисунке 1.

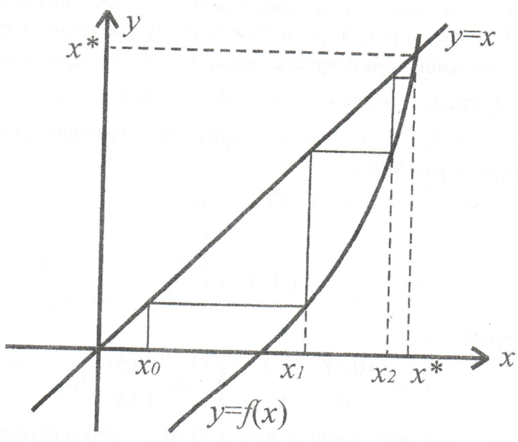

Рис. 1.

Лемма 1 несколько расширяет возможности применения теоремы Банаха. Приведем простой пример этого. Рассмотрим матричный оператор $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, который отображает пространство R^2 на себя. Расстояние между точками $x'(x_1';x_2')$ и $x''(x_1'';x_2'')$ этого пространства определим с помощью равенства $\rho(x';x'') = \max\limits_{1\le i\le 2}\{|x_i' - x_i''|\}$.

Условие, достаточное для того, чтобы этот оператор был оператором сжатия, можно записать в виде равенства $\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| \le \alpha < 1$ (i = 1, 2) [3, с. 66]. Однако оператор $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ этому условию не удовлетворяет, поскольку для него имеем: $\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| = 2 > 1$ (i = 1, 2).

С другой стороны, он удовлетворяет условию (2) Леммы 1, и поэтому для него существует обратный оператор $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, который является оператором сжатия, так как справедливо неравенство $\sum\limits_{j=1}^{2}|a_{ij}| = 0{,}5 < 1$ (i = 1, 2).

По этой же лемме оператор А имеет единственную неподвижную точку, поиск которой можно проводить методом последовательных приближений, начиная с произвольной точки пространства R^2, например, с точки $(1;1)$. Для этого последовательность точек $x_n \in R^2$ будем строить по формуле $x_{n+1} = A^{-1}(x_n)$ (i = 0, 1, …), где $x_0 = (1;1)$. n – кратное применение этой формулы приведет к равенству

$$x_n = (A^{-1})^n(x_0) = (A^n)^{-1}(x_0). \tag{4}$$

Далее имеем:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,5)^n \end{pmatrix}.$$

Равенство (4) примет вид:

$$x_n = \begin{pmatrix} (0,5)^n & 0 \\ 0 & (0,5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,5)^n \\ (0,5)^n \end{pmatrix}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим неподвижную точку $x = (0;0)$.

На практике нахождение обратного оператора в большинстве случаев связано со значительными трудностями, а в некоторых случаях он может вообще не существовать, поэтому представляет интерес замена исследуемого оператора другим оператором, с той же неподвижной точкой, и для которого обратный оператор либо известен, либо находится достаточно просто. Если такой оператор найден, то неподвижную точку исследуемого оператора можно найти, пользуясь следующим утверждением.

Лемма 2. Пусть операторы u та v отображают полное метрическое пространство X на себя. Кроме того, оператор u имеет неподвижную точку $x^* \in X$ и непрерывен в этой точке.

Если в каждой точке $x \in X$ выполняется равенство

$$\rho\big(u(x);v(x)\big) + \rho(v(x);x) = \rho\big(u(x);x\big), \tag{5}$$

то x^* - неподвижная точка оператора v, и он непрерывен в этой точке.

Доказательство. Поскольку x^* - неподвижная точка оператора u, то выполняется равенство

$$u(x^*) = x^*. \tag{6}$$

подставляя это равенство в равенство (5), получим:

$$\rho\big(x^*;v(x^*)\big) + \rho(v(x^*);x^*) = \rho\big(x^*;x^*\big) = 0.$$

Следовательно, $\rho\big(x^*;v(x^*)\big) = 0$ и $v(x^*) = x^*$, а это значит, что x^* - неподвижная точка оператора v.

Для доказательства непрерывности оператора v в точке x^* возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ точек пространства X, сходящуюся к точке x^*:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n;x^*) = 0. \tag{7}$$

Для произвольного элемента x_n этой последовательности из равенства (5) получаем неравенство:

$$\rho\big(v(x_n);x_n\big) = \rho(u(x_n);x_n) - \rho\big(u(x_n);v(x_n)\big) \le \rho\big(u(x_n);x_n\big).$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя равенства (5) и (7), а также непрерывность оператора u в точке x^*, получим

$$\lim_{n\to\infty} \rho\big(v(x_n);x_n\big) \le \lim_{n\to\infty} \rho(u(x_n);x_n) = \rho\big(x^*;x^*\big) = 0.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\big(v(x_n);x^*\big) \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho(v(x_n);x_n) + \lim\limits_{n\to\infty}\big(x_n;x^*\big) = 0$ и поэтому оператор v непрерывен в точке x^*. Лемма доказана.

Лемму 2 можно назвать леммой о непрерывной точке промежуточного оператора, по аналогии с классической теоремой о пределе промежуточной функции. Например, для случая, когда $u(x) = kx$ $(k > 1)$; $v(x) = f(x)$, $x \in R^1$ равенство (5) записывается в виде:

$$|kx - f(x)| + |f(x) - x| = (k-1)|x|.$$

Если же $x < f(x) < kx$ (рис.2), то это равенство выполняется и функция $f(x)$ имеет, как и функция $y = kx$, неподвижную точку $x = 0$.

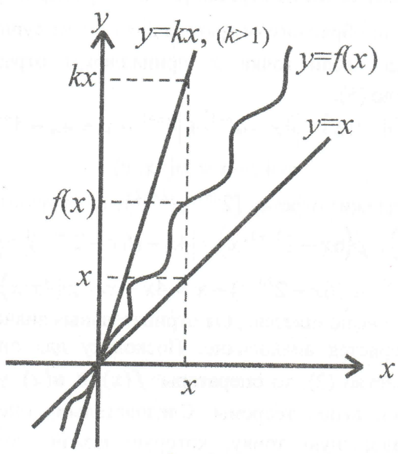

Рис. 2.

Простым следствием лемм 1 и 2 является следующий результат.

<u>Теорема.</u> Пусть операторы u и v, отображающие полное метрическое пространство X на себя, удовлетворяют условию (5), а оператор u, кроме того, удовлетворяет условию (2).

Тогда оператор v имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить методом последовательных приближений, как предел последовательности точек $x_{n+1} = u^{-1}(x_n)$ (n=0, 1, 2, ...), где x_0 - произвольная точка пространства X.

Приведем простой пример оператора, отображающего R^1 на себя, у которого нет обратного оператора и который не удовлетворяет ни условию (1), ни условию (2):

$$f(x) = \begin{cases} 4^{n+1}, & x \in [2^{2n}; 2^{2n+1}]; \\ 6x - 2^{2n+3}, & x \in [2^{2n+1}; 2^{2n+2}]; \\ -4^{n+1}, & x \in [-2^{2n+1}; -2^{2n}]; \\ 6x + 2^{2n+3}, & x \in [-2^{2n+2}; -2^{2n+1}]; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

для $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Если две различные точки x' и x'' взять из отрезка $[2^{2n}; 2^{2n+1}]$, то $\rho(f(x'); f(x'')) = \rho(4^{n+1}; 4^{n+1}) = 0$, и не выполняется неравенство (2). Если точки x' и x'' взять из отрезка $[2^{2n+1}; 2^{2n+2}]$, то $\rho(f(x'); f(x'')) = \rho(6x' - 2^{n+3}; 6x'' - 2^{n+3}) = 6|x' - x''| = 6\rho(x'; x'')$, и не выполняется неравенство (1). Поскольку для всех точек из отрезка $[2^{2n}; 2^{2n+1}]$ оператор принимает одно и то же значение 4^{n+1}, то обратного оператора для него не существует.

С другой стороны, если точка x принадлежит отрезку $[2^{2n}; 2^{2n+1}]$, то выполняется равенство (5):

$$\rho(4x; 4^{n+1}) + \rho(4^{n+1}; x) = |4x - 4^{n+1}| + |4^{n+1} - x| = 4x - 4^{n+1} + 4^{n+1} - x = $$
$$= 4x - x = \rho(4x; x).$$

Если точка x принадлежит отрезку $[2^{2n+1}; 2^{2n+2}]$, то получим:

$$\rho(4x; 6x - 2^{2n+3}) + \rho(6x - 2^{2n+3}; x) = |4x - (6x - 2^{2n+3})| + |(6x - 2^{2n+3}) - x| =$$
$$= 4x - (6x - 2^{2n+3}) + (6x - 2^{2n+3}) - x = 4x - x = \rho(4x; x),$$

и равенство (5) также выполняется. Для отрицательных значений x выполнение равенства (5) проверяется аналогично. Поскольку для оператора $u(x) = 4x$ выполняется неравенство (2), то операторы $f(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют всем условиям полученной выше теоремы. Следовательно, оператор $f(x)$ имеет единственную неподвижную точку, которую можно получить как предел последовательности точек $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ $(n = 0;1;2;\ldots)$, где x_0 - произвольная точка $\mathbb{R}^1$, например $x_0 = 1$. Тогда $x_n = \frac{1}{2^n}$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$. Поэтому $x = 0$ - неподвижная точка оператора $f(x)$.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Полученные результаты работы указывают на то, что при поиске неподвижной точки оператора, отображающего полное пространство на себя и не являющегося оператором сжатия, следует искать более простой оператор растяжения, для которого существует обратный оператор сжатия и находить для него методом последовательных приближений неподвижную точку.

В дальнейшем представляет интерес изучить условия существования общей точки нескольких операторов, то есть точки, в которой значения этих операторов совпадают. Это даст возможность упрощать процесс поиска неподвижных точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.
2. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с
3. Колмогоров А.М., Фомін С.В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 455 с.