

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Том 63

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1986

УДК 520.8

КУЗЬМЕНКОВ С. Г.

**ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ
СПЕКЛ-ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.
ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ**

Исследованы предельные возможности спекл-интерферометрических измерений двойных звезд и проанализированы факторы, их ограничивающие. Потенциальная точность оценки разделения, позиционного угла и разности блеска компонентов исследована при раздельной и совместной оценке этих параметров. Предельная звездная величина для данных обстоятельств наблюдения определена в связи с решением конкретной задачи измерения. Полученные результаты позволяют планировать эксперимент при спекл-интерферометрических измерениях двойных звезд.

THE POTENTIAL PRECISION OF THE SPECKLE INTERFEROMETRIC MEASUREMENTS. BINARY STARS, by *Kuz'menkov S. G.*— The limiting possibilities of speckle interferometric measurements are studied and the factors limiting these are analysed. The potential precision of the estimate of binary star angular separation, position angle and magnitude difference under separate and joint estimation of these parameters is studied. The limiting magnitude for given observation circumstances is defined in connection with the solution of the concrete measurement problem. The results obtained allow to design the experiment of speckle interferometric measurements of binary stars.

Введение

Применение метода спекл-интерферометрии к исследованию двойных звезд оказалось наиболее плодотворным. Совместными усилиями наблюдателей, использующих этот метод, обнаружено несколько десятков новых систем с разделениями компонентов вплоть до $0'',02$. Регулярные наблюдения систем, известных ранее только как спектрально-двойные, позволили Макалистеру (McAlister) для девяти из них определить в конечном итоге массы и светимости компонентов.

Естественно, что для построения орбит высокого качества и надежного определения фундаментальных астрофизических параметров необходимы измерения, выполненные с высокой точностью. Результаты измерений двойных звезд, представленные в работе [1], хорошо иллюстрируют точность метода спекл-интерферометрии. Лучшие измерения имеют среднеквадратичную погрешность менее 1% для углового расстояния между компонентами и $0^\circ,1$ для позиционного угла. В этой заключительной части данной работы мы исследуем потенциальную точность спекл-интерферометрических измерений двойных звезд.

Во второй статье данной работы [2] была определена в общем виде ковариационная матрица ошибок совместно-эффективных (по Крамеру — Рао) оценок компонентов параметрического вектора $\mathbf{p} = \mathbf{p}(p_1, p_2, \dots, p_N)$ произвольного объекта по результатам измерения спектра мощности спекл-изображений и оговорены условия получения таких оценок. При этом учитывались влияния на результаты измерений спекл-шума, обусловленного атмосферной турбулентностью, и квантовых флуктуаций светового потока [3].

При раздельной оценке компонентов p_1, p_2, \dots, p_N (когда кроме одного, например p_j , все остальные считаются точно известными) граничное значение Крамера — Рао для дисперсии оценки имеет вид [2, 3]

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{2n_{os}^2 (M-1) K_j}, \quad (1)$$

где

$$K_j = \int_0^{\pi} \int_0^{v_D} \frac{[g_D(v)]^2 \left[\frac{\partial \Phi(v, \psi, \mathbf{p})}{\partial p_j} \right]^2 v dv d\psi}{[1 + n_{os} g_D(v) \Phi(v, \psi, \mathbf{p})]^2}, \quad (2)$$

n_{os} — среднее число детектируемых фотонов на спекл, M — число спекл-изображений $\Phi(v, \psi, \mathbf{p}) = |f_n(v, \psi, \mathbf{p})|^2$ — нормированный квадрат модуля фурье-преобразования от распределения яркости по объекту, $g_D(v)$ — дифракционная оптическая передаточная функция (ОПФ) телескопа, $v_D = D/\lambda$ — пространственная частота, ограниченная дифракцией в телескопе.

При совместном оценивании компонентов p_1, p_2, \dots, p_N их оценки в общем случае будут коррелированы. Коэффициент корреляции совместно-эффективных оценок p_j и p_l определяется выражением [2]

$$g_{jl} = \frac{K_{jl}}{\sqrt{K_j} \sqrt{K_l}}, \quad (3)$$

где

$$K_{jl} = \int_0^{\pi} \int_0^{v_D} \frac{[g_D(v)]^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_l} \right) v dv d\psi}{[1 + n_{os} g_D(v) \Phi(v, \psi, \mathbf{p})]^2}, \quad (4)$$

а K_j и K_l имеют тот же смысл, что и в (2).

Формулы (1)–(4) справедливы при следующих предположениях: 1) светоприемники являются линейными на всех этапах вплоть до измерения спектров мощности; 2) время экспозиции одного спекл-изображения t_E и ширина спектральной полосы $\Delta\lambda$ удовлетворяют условиям: $t_E \leq \tau_s$ [4] и $\Delta\lambda/\lambda \leq r_0/D$ [5], где τ_s — характерное «время жизни» спеклов (1–10 мс), λ — эффективная длина волны принимаемого излучения и r_0 — радиус когерентности возмущенного атмосферой волнового фронта (параметр Фрида [6]); 3) размеры объекта не выходят за пределы изопланатической области [7]; 4) величина $(D/r_0)^2 \gg 1$, что всегда справедливо для крупных телескопов в оптическом диапазоне, так как в типичных условиях $r_0 \approx 10$ см и в лучшем случае $r_0 \leq 20$ см [8]; 5) аберрации телескопа пренебрежимо малы для областей размером r_0 . Отметим, что предположения 2) и 3) вполне естественны для спекл-интерферометрии, а их нарушение можно учесть, пользуясь результатами работ Родье и др. [4, 7]. Напомним также, что наш анализ ограничен практически интересным случаем $n_T > 1$, где n_T — среднее число фотонов, детектируемых в одном спекл-изображении.

Постановка задачи

Будем предполагать, что задача обнаружения уже решена и остается лишь задача измерения (оценивания) неизвестных параметров. Модель объекта, фигурирующая в качестве априорной информации, представляет собой два некогерентных точечных источника. Тогда по периоду косинусоидальной функции в спектре мощности можно определить угловое расстояние между компонентами ρ , по ориентации спектра относительно заданного направления — позиционный угол φ , а по контрасту косинусоиды — разность блеска компонентов Δm . Именно таким образом ставится типичная задача спекл-интерферометрических измерений визуально-двойных и спектрально-двойных звезд. Она возникает всегда, когда видимые размеры каждого компонента пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними.

Спекл-изображение двойной звезды состоит из двух идентичных спекл-картин, сдвинутых относительно друг друга. Отличаться они могут только по яркости в соответствии с яркостью компонентов, если, разумеется, их разделение ρ не выходит за пределы изопланатической области. В этом

случае величина n_{os} в формулах (1), (2), (4), очевидно, равна

$$n_{os} = n_{s1} + n_{s2} = n_{s1}(1 + \beta), \quad (5)$$

где n_{s1} — среднее число фотособытий на спекл от главного компонента, а

$$\beta = \frac{n_{s2}}{n_{s1}} = 10^{-0,4\Delta m}, \quad (6)$$

где Δm — разность блеска компонентов.

Так же, как и в случае протяженных источников, которым были посвящены первые две статьи [2, 3] данной работы, введем меру близости компонентов двойной звезды e и определим ее как отношение разделения ρ к дифракционному элементу разрешения λ/D :

$$e = \frac{\rho D}{\lambda}. \quad (7)$$

Тогда нормированный квадрат модуля спектра объекта в полярных координатах ξ, ψ , где $\xi = v/v_D$ ($0 \leq \xi \leq 1$), описывается выражением

$$\Phi(\xi, \psi) = 1 + B \{ \cos[2\pi e \xi \cos(\psi - \varphi)] - 1 \}, \quad (8)$$

где

$$B = \frac{2\beta}{(1 + \beta)^2}. \quad (9)$$

Величина $B = 0,5$ при $\Delta m = 0$ и стремится к 0 при $\Delta m \rightarrow \infty$.

Сначала мы исследуем потенциальную точность оценок $\Delta m, \rho$ и φ при отдельной оценке параметров, затем перейдем к практически очень важному случаю совместной оценки параметров.

Точность оценки разности блеска компонентов

Найдем сначала потенциальную точность оценки параметра B . При решении данной задачи для произвольного уровня детектируемого сигнала приходится прибегать к численному интегрированию по обеим координатам. Однако при низких световых уровнях, т. е. при $n_{s1}(1 + \beta) \ll 1$, задачу удастся свести к вычислению однократного интеграла. В этом случае слагаемым $n_{os} g_D(\xi) \Phi(\xi, \psi, \rho)$ в знаменателе подынтегрального выражения в (2) можно пренебречь. Таким образом, приходим к интегралу

$$K_B = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^1 \{ \cos[2\pi e \xi \cos(\psi - \varphi)] - 1 \}^2 (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2})^2 \xi d\xi d\psi. \quad (10)$$

Здесь, как и везде в дальнейшем, в качестве $g_D(\xi)$ используется ОПФ телескопа с круглой сплошной апертурой. Раскрывая фигурные скобки и используя соотношение $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$, а также известный интеграл [9]

$$\int_0^{\pi} \cos(a \cos x) dx = \pi J_0(a), \quad (11)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, после интегрирования по ψ получаем

$$K_B = \frac{2}{\pi} \int_0^1 [3 + J_0(4\pi e \xi) - 4J_0(2\pi e \xi)] (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2})^2 \xi d\xi. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (1) и обозначая $K_B = 2H_B/\pi$ для величины σ_B находим

$$\sigma_B = \frac{\sqrt{\pi}}{2n_{s1}(1 + \beta)\sqrt{(M - 1)H_B}}, \quad n_{s1}(1 + \beta) \ll 1. \quad (13)$$

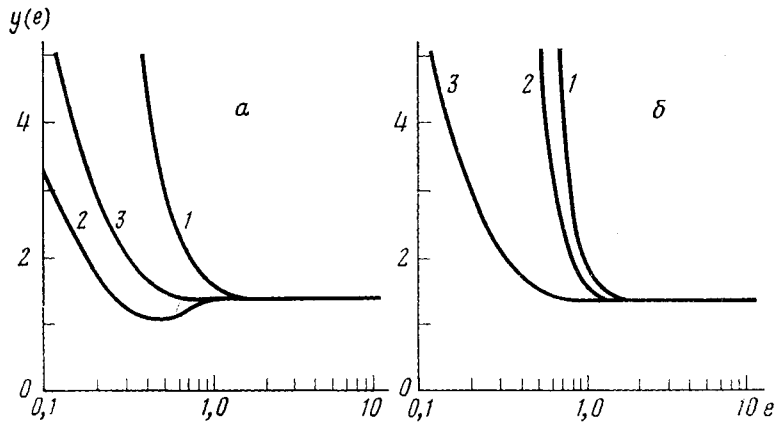


Рис. 1. Среднеквадратичная ошибка оценок параметров B , e и φ в зависимости от величины $e = \rho D / \lambda$ в случае $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$: a — при раздельной оценке параметров: $1 - y(e) = n_{s1}(1+\beta)\sqrt{M-1}\sigma_B$; $2 - y(e) = \beta n_{s1}\sqrt{M-1}\sigma_e / 0,68(1+\beta)$ и $3 - y(e) = \beta n_{s1}e\sqrt{M-1}\sigma_\varphi / 0,68(1+\beta)$. b — аналогичные кривые при совместной оценке параметров, где вместо σ_B , σ_e и σ_φ фигурируют σ_B^* , σ_e^* и σ_φ^*

Интеграл H_B (как и другие однократные интегралы, которые встретятся в дальнейшем) был вычислен для разных e с помощью ЭВМ «Наири-К». График зависимости σ_B от e нормированный таким образом, чтобы не зависеть от конкретных условий (т. е. от Δm , n_{s1} и M), для случая $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$ представлен на рис. 1, a (кривая 1). При $e \gg 1$ справедливо выражение

$$\sigma_B = \frac{1,36}{n_{s1}(1+\beta)\sqrt{M-1}}, \quad e \gg 1, \quad n_{s1}(1+\beta) \ll 1. \quad (14)$$

Теперь необходимо перейти от величины σ_B к $\sigma_{\Delta m}$. Это легко сделать для больших значений Δm . Действительно, при $\beta \ll 1$ из (9) следует

$$B \approx 2\beta = 2 \cdot 10^{-0,4\Delta m}. \quad (15)$$

Откуда

$$\Delta m = 2,5(\lg 2 - \lg B). \quad (16)$$

И величину $\sigma_{\Delta m}$ оцениваем известным образом

$$\sigma_{\Delta m} = \left| \frac{d(\Delta m)}{dB} \right| \sigma_B = \frac{1,085}{B} \sigma_B = 0,54 \cdot 10^{0,4\Delta m} \sigma_B. \quad (17)$$

Для того чтобы найти точный переход от σ_B к $\sigma_{\Delta m}$ для всех значений Δm , необходимо знать функцию плотности вероятности оценки \hat{B} . Пусть истинное значение B в измеряемом спектре мощности есть B_0 . В силу центральной предельной теоремы величина $\hat{B} - B_0$ распределена асимптотически нормально с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ_B .

Далее, подставляя (6) в (9) и решая уравнение относительно Δm , нетрудно убедиться, что решением его (из двух возможных) будет

$$\Delta m = 2,5[\lg B - \lg(1 - B + \sqrt{1 - 2B})]. \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta m}^2 = & \frac{6,25}{\sigma_B^2 2\pi^{0,5}} \int [\lg B - \lg(1 - B + \sqrt{1 - 2B})]^2 \times \\ & \times \exp\left[-\frac{(B - B_0)^2}{2\sigma_B^2}\right] dB - \left\{ \frac{2,5}{\sigma_B \sqrt{2\pi^{0,5}}} \int [\lg B - \lg(1 - B + \sqrt{1 - 2B})] \times \right. \\ & \left. \times \exp\left[-\frac{(B - B_0)^2}{2\sigma_B^2}\right] dB \right\}^2. \quad (19) \end{aligned}$$

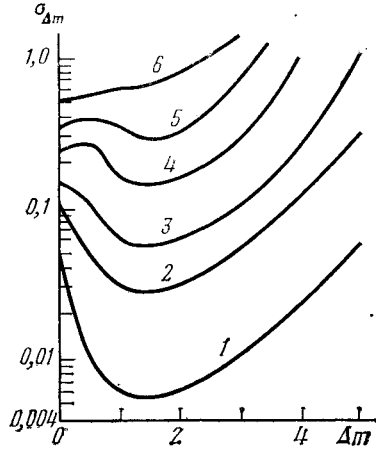


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной ошибки $\sigma_{\Delta m}$ оценки разности блеска компонентов Δm от величины Δm : 1 - при $\sigma_B = 0,001$; 2 - 0,005; 3 - 0,01; 4 - 0,025; 5 - 0,05; 6 - 0,1

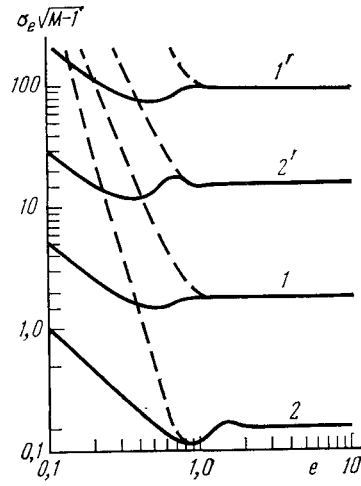


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной ошибки оценки меры близости компонентов двойной звезды σ_e , умноженной на $\sqrt{M-1}$, от ее величины $e = \rho D / \lambda$: 1 - $n_{s1} = 1$, $\Delta m = 0$; 1' - $n_{s1} = 1$, $\Delta m = 5^m$; 2 и 2' - $n_{s1} = 10^2$ при $\Delta m = 0$ и 5^m соответственно. Штриховые линии соответствуют случаю совместной оценки параметров

Вычисления по формуле (19) велись для значений Δm и σ_B , удовлетворяющих условию $\sigma_B \ll B$. На рис. 2 показана зависимость $\sigma_{\Delta m}$ от Δm при разных значениях σ_B . Из рис. 2 видно, что для малых значений σ_B , таких, что справедливо приближение $\sigma_{\Delta m} \approx \left| \frac{d(\Delta m)}{dB} \right| \sigma_B$, вытекающее из воз-

можности представления нелинейной функции $\Delta m = \Delta m(B)$ рядом Тейлора с учетом лишь членов первого порядка, функция $\sigma_{\Delta m} = \sigma_{\Delta m}(\Delta m)$ имеет отчетливый минимум. Наличие этого минимума означает, что оценить с высокой точностью значения Δm , близкие к нулю, так же трудно, как и большие Δm .

Из (13) и (14) следует, что величина σ_B слабо зависит от Δm и при $\Delta m \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу. Из рис. 2, а также из (17) видно, что величина $\sigma_{\Delta m}$ при $\Delta m \rightarrow \infty$ растет неограниченно.

Точность отдельных оценок параметров ρ и ϕ

Остановимся подробнее на случае $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$. Подставляя выражения для $\partial\Phi/\partial e$ и $\partial\Phi/\partial\phi$ последовательно в (2) и пренебрегая, как и ранее, слагаемым $n_{os}g_D(\xi)\Phi(\xi, \phi, \rho)$ в знаменателе, интегрируем по ϕ , для чего сначала понижаем степень тригонометрических функций, выражая их через косинус двойного угла, а затем используем известный интеграл [9]

$$\int_0^\pi \cos(a \cos x) \cos nx \, dx = \pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) J_n(a), \quad (20)$$

где J_n - функция Бесселя n -го порядка.

В результате для K_e и K_ϕ получаем

$$K_e = 4\pi B^2 \int_0^1 [1 - J_0(4\pi e\xi) + J_2(4\pi e\xi)] (\arccos \xi - \xi) \sqrt{1 - \xi^2} \xi^3 \, d\xi, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
K_{\varphi} &= 4\pi B^2 e^2 \int_0^1 [1 - J_0(4\pi e \xi) - J_2(4\pi e \xi)] (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2})^2 \xi^3 d\xi = \\
&= 4\pi B^2 e^2 \int_0^1 \left[1 - \frac{J_1(4\pi e \xi)}{2\pi e \xi} \right] (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2})^2 \xi^3 d\xi, \quad (22)
\end{aligned}$$

где J_0, J_1, J_2 — функции Бесселя нулевого, первого и второго порядка соответственно.

Обозначая то, что находится под знаком интеграла через H_e в (21) и H_{φ} в (22), окончательно находим для σ_e и σ_{φ} :

$$\sigma_e = \frac{1}{2Bn_{s1}(1+\beta)\sqrt{2(M-1)\pi H_e}} \quad (23)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{2Bn_{s1}(1+\beta)e\sqrt{2(M-1)\pi H_{\varphi}}} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} (23) \\ (24) \end{aligned} \right\} n_{s1}(1+\beta) \ll 1.$$

Графики зависимости σ_e и σ_{φ} от e , нормированные так, чтобы не зависеть от $\Delta m, n_{s1}$ и M представлены на рис. 1, а (кривые 2 и 3). При $e \geq 1$ интегралы H_e и H_{φ} перестают зависеть от e и в этом случае для σ_e и σ_{φ} справедливы выражения

$$\sigma_e = \frac{1,36}{Bn_{s1}(1+\beta)\sqrt{M-1}} = \frac{0,68(1+\beta)}{\beta n_{s1}\sqrt{M-1}} \quad (25)$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sigma_e}{e} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} (25) \\ (26) \end{aligned} \right\} e \geq 1, n_{s1}(1+\beta) \ll 1.$$

Случай высоких уровней детектируемого сигнала приведен на рис. 3. На нем представлены графики зависимости среднеквадратичной ошибки оценки меры близости σ_e , умноженной на $\sqrt{M-1}$, от ее величины e , когда $n_{s1} = 1$ и 10^2 фотособытий на спекл, и $\Delta m = 0$ и 5^m . Необходимые для этого вычисления были выполнены на ЭВМ ЕС-1052 (все двойные интегралы в данной работе вычислялись с помощью этой ЭВМ). Из рис. 3 видно, что, во-первых, при $e > 1$ среднеквадратичная ошибка оценки меры близости компонентов двойных звезд не изменяется с ростом e , оставаясь постоянной для данных $\Delta m, n_{s1}$ и M . Во-вторых, изменение общего уровня сигнала в 100 раз (в случае $n_{s1} \geq 1$) существенно меньше повлияло на величину σ_e , чем такое же изменение яркости спутника по отношению к яркости главного компонента.

Совместная оценка параметров

Рассмотрим сначала случай $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$. Для того чтобы найти коэффициенты корреляции совместно-эффективных оценок \hat{B}, \hat{e} и $\hat{\varphi}$, подставим попарно выражения для $\partial\Phi/\partial B, \partial\Phi/\partial e$ и $\partial\Phi/\partial\varphi$ в (4) и проинтегрируем по φ . Учитывая, что [9]

$$\int_0^{\pi} \sin(a \cos x) \sin nx \, dx = 0, \quad (27)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(a \cos x) \cos nx \, dx = \pi \sin \frac{n\pi}{2} J_n(a),$$

находим, что интегралы $K_{e\varphi}$ и $K_{B\varphi}$ обращаются в нуль, а следовательно, $q_{e\varphi} = 0$ и $q_{B\varphi} = 0$. Коэффициент корреляции оценок параметров B и e ока-

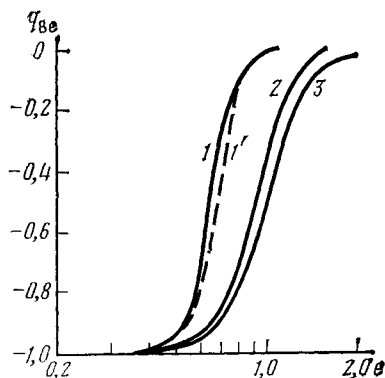


Рис. 4

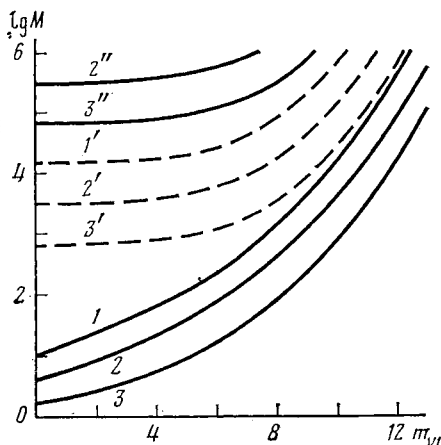


Рис. 5

Рис. 4. Коэффициент корреляции совместно-эффективных оценок параметров B и e в зависимости от величины $e = \rho D / \lambda$: 1 - $n_{s1} = 10^2$, $\Delta m = 0$; 1' - $n_{s1} = 10^2$, $\Delta m = 5^m$; 2 - $n_{s1} = 1$, $\Delta m = 0 - 5^m$; 3 - случай $n_{s1}(1 + \beta) \ll 1$

Рис. 5. Число спекл-изображений M , необходимое для достижения точности оценивания параметра $e = \rho D / \lambda$ 1% от звездной величины главного компонента m_{V1} : 1 и 1' - $e = 1$ при $\Delta m = 0$ и $2^m, 5$ соответственно; 2, 2' и 2'' - $e = 5$ при $\Delta m = 0$, $2^m, 5$ и 5^m ; 3, 3' и 3'' - те же значения Δm , но $e = 25$

зывается равным:

$$q_{Be} = -\sqrt{2} \frac{H_{Be}}{\sqrt{H_B} \sqrt{H_e}}, \quad n_{s1}(1 + \beta) \ll 1, \quad (28)$$

где

$$H_{Be} = \int_0^1 [2J_1(2\pi e \xi) - J_1(4\pi e \xi)] (\arccos \xi - \xi \sqrt{1 - \xi^2})^2 \xi^2 d\xi, \quad (29)$$

а H_B и H_e имеют то же значение, что в (13) и (23) соответственно.

График зависимости q_{Be} от e при $n_{s1} = 10^2$, 1 и $n_{s1}(1 + \beta) \ll 1$ изображен на рис. 4. Из рисунка видно, что во-первых, коэффициент корреляции уменьшается по абсолютной величине с ростом n_{s1} . Отсюда, а также из равенства нулю величин $q_{e\varphi}$ и $q_{\varphi e}$ при $n_{s1}(1 + \beta) \ll 1$ следует, что $q_{e\varphi} = 0$ и $q_{\varphi e} = 0$ при произвольном уровне детектируемого сигнала. Во-вторых, величина q_{Be} почти не зависит от разности блеска компонентов. Так, для $n_{s1} = 10^2$ фотособытий на спекл, значения q_{Be} при $\Delta m = 0$ и $\Delta m = 5^m$ (кривые 1 и 1') мало отличаются друг от друга, а для $n_{s1} = 1$ отличия нет совсем.

Наличие корреляции между оценками параметров B и e при $e \leq 1$ означает, что, исключая случаи $n_{s1} \geq 1$, трудно различить их воздействие на форму (профиль) спектра мощности, а при $e \leq 0,3$ это сделать практически невозможно в любом случае. Следует отметить, что в той области значений e , где q_{Be} отличен от нуля, эффекты влияния величины B и e на форму спектра одинаковы по знаку, а отрицательность q_{Be} компенсирует эти влияния.

Следовательно, если априорная информация о разности блеска компонентов отсутствует, то практически нет никакой возможности измерить угловое разделение при $e \leq 0,3$, а для низких световых уровней сигнала ($n_{s1} < 1$) - при $e < 0,5$.

Зная q_{Be} , $q_{\varphi e}$ и $q_{e\varphi}$ и среднеквадратичные ошибки σ_B , σ_e , σ_φ раздельно-эффективных оценок, можно найти среднеквадратичные ошибки σ_B^* , σ_e^* и σ_φ^* совместно-эффективных оценок искомых параметров. Имеем [10]:

$$\sigma_B^{*2} = \frac{\sigma_B^2}{1 - q_{Be}^2},$$

$$\sigma_e^{*2} = \frac{\sigma_e^2}{1 - q_{Be}^2}, \quad (30)$$

$$\sigma_\varphi^{*2} = \sigma_\varphi^2.$$

Как следует из поведения q_{Be} , при $e > 1,5$, когда $n_{s1} \leq 1$, и при $e > 1$ во всех остальных случаях справедливы равенства $\sigma_B^* = \sigma_B$ и $\sigma_e^* = \sigma_e$. Иллюстрацией этого служат: рис. 1, б, на котором изображены графики зависимостей σ_B^* , σ_e^* и σ_φ^* от величины e для случая $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$, и рис. 3, на котором штриховыми линиями представлена зависимость σ_e^* от e в случае высоких световых уровней. Таким образом, при совместной оценке параметров B , e и φ , когда $e > 1$ (при $n_{s1} \leq 1$, когда $e > 1,5$), потенциальная точность оценки каждого из параметров оказывается такой же, как и в случае оценки его при точно известных других двух параметрах.

Итак, точность решения задачи измерения двойной звезды исследована и для случая, когда априорная информация об объекте сведена к минимуму и заключается лишь в том, что это — двойная звезда, описываемая моделью двух точечных источников.

Предельная звездная величина

Оценим, какова должна быть звездная величина объекта, если при заданных условиях наблюдения необходимо получить точность раздельной оценки величины e 1%, когда $e=1$. Это легко сделать, когда $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$, что при $\Delta m=0$ означает $n_{s1} \leq 0,5$. Пусть $M=10^6$. Из (25) находим требуемое число фотособытий на спекл (в среднем) — $n_{s1} \approx 0,14$. С другой стороны, $n_{s1} = n_{T1}/N_{s1}$, где n_{T1} — среднее число детектируемых фотонов на спекл-изображение главного компонента, а N_{s1} — среднее число спеклов в этом изображении. Величину N_{s1} (очевидно, всегда $N_{s1} = N_{s2}$) обычно полагают равной [11, 12]:

$$N_{s1} = \frac{1}{0,435} \left(\frac{D}{r_0} \right)^2. \quad (31)$$

Зная N_{s1} , нетрудно показать, что

$$n_{s1} = 0,342 \eta n_{v1} t_E \Delta \lambda r_0^2, \quad (32)$$

где n_{v1} — спектральная плотность потока от главного компонента (квантов/см²·с·нм), а под величиной η мы, как и в первых двух статьях данной работы, подразумеваем эквивалентный квантовый выход спекл-камеры [13, 14]. Предположим, что условия наблюдения таковы: $r_0=10$ см, $t_E=0,01$ с, $\Delta \lambda=40$ нм и $\eta=10\%$. Тогда спектральная плотность потока от главного компонента (при $\Delta m=0$ — от каждого из компонентов) должна составить $n_{v1}=0,1$ квантов/см²·с·нм. Так как плотность потока от звезды нулевой величины в зеленой области спектра равна $n_0=10^4$ квантов/см²·с·нм [15], то

$$m_{v1} = 2,5 \lg \frac{n_0}{n_{v1}} = 12^m,5.$$

При совместной оценке параметров — $m_{v1} \approx 12^m,3$. Предельная звездная величина, необходимая для достижения той же точности, но при $e=10$, будет $m_{v1}=15^m$ в обоих случаях. Если при увеличении e должна сохраняться абсолютная точность, то m_{v1} не увеличивается.

В общем случае можно рассчитать объем выборки M , необходимый для решения данной задачи измерения, в зависимости от яркости объекта. На рис. 5 изображена зависимость величины M от m_{v1} , соответствующая требованию $\sigma_e/e=1\%$, когда $e=1$; 5 и 25 при $\Delta m=0$, $2^m,5$ и 5^m . Этот рисунок позволяет проследить влияние на величину объема выборки трех факторов: блеска m_{v1} , разности блеска Δm и разделения компонентов $e = \rho D/\lambda$ (при $e \geq 1$). Из рисунка видно, что для ярких объектов разность блеска является доминирующим фактором. С ростом m_{v1} влияние яркости объекта постепенно становится преобладающим. Таким образом, рис. 5

дает представление о предельной звездной величине объектов, доступных методу спекл-интерферометрии при решении конкретной задачи измерения.

Заключение

Таким образом, исследована потенциальная точность оценки искомых параметров в задаче измерения двойных звезд методом спекл-интерферометрии. Потенциальная точность спекл-интерферометрических измерений определяется типом объекта и его яркостью, ОПФ телескопа и свойствами светоприемника, количеством зарегистрированных спекл-изображений и степенью турбулентности атмосферы. Важной отличительной особенностью этих измерений является зависимость точности от числа M зарегистрированных спекл-изображений, а в случае низких световых уровней — от среднего числа фотособытий на спекл в первой степени. Зависимость $\sigma_p \propto \propto 1/\sqrt{M-1}$ является серьезным ограничивающим фактором для высокоточных измерений особенно слабых объектов, поскольку на практике вряд ли возможно получить и обработать более чем 10^6 статистически независимых спекл-изображений. Другим существенным ограничивающим фактором является степень турбулентности атмосферы или качество изображения, характеризуемое параметром Фрида r_0 , так как в случае $n_{s1}(1+\beta) \ll 1$ $\sigma_p \propto \propto 1/r_0^2$ при условии, что время экспозиции (на один кадр) и ширина полосы фильтра выбраны правильно. Квадратичная (как минимум, как показано в первой статье [3] данной работы) зависимость точности от r_0 означает, что при ухудшении качества изображения, спекл-интерферометрические измерения быстро теряют свою эффективность.

Существует много оценок предельной звездной величины для метода спекл-интерферометрии (например, [12, 16–19]). Но все они основываются на критериях, выбранных достаточно произвольно. Как правило, в качестве любого критерия используется определенная величина (выбирается произвольно) отношения сигнал/шум, позволяющая, как утверждается, либо обнаружить данный объект, либо измерить его. Что касается возможности измерить, то без оговаривания той точности, которая при этом ожидается, это понятие остается размытым.

Дейнти [12, 16, 17], например, исходит из предположения, что измерения двойной звезды как по автокорреляционной функции, так и по спектру мощности становятся возможными, если результирующее по M изображениям отношение сигнал/шум $(S/N)_M$ в определенной точке равно 5. У двойной звезды автокорреляционная функция содержит два максимума, расположенных симметрично относительно начала координат на расстоянии $2e$ друг от друга. Сигналом в этом случае принято считать [12, 17] высоту этих максимумов над окружающим их фоном, а шум есть среднеквадратичная флуктуация этого фона. Тогда при $\Delta m=0$, $M=10^5$, $D=4$ м, $t_E=0,02$ с, $\Delta\lambda=25$ нм, $r_0=20$ см и $\eta=10\%$ условие $(S/N)_M=5$ приводит к предельной величине $m_V \approx 18^m$ [12]. При измерениях спектра мощности помимо условия $(S/N)_M=5$ в произвольно выбранной точке ξ необходимо задать величину сигнала $g_D(\xi)|f_n(\xi)|^2$ в этой точке. Очевидно, это вносит еще большую неопределенность в оценку m_V . При $g_D(\xi)|f_n(\xi)|^2=0,2$ [12] и тех же условиях наблюдения получается, что $m_V=14^m,7$ (в [12] $m_V=13^m,2$, но при $r_0=10$ см). Предельная звездная величина в этом случае оказывается не зависящей от диаметра телескопа.

В данной работе предельная звездная величина определяется в связи с решением конкретной задачи измерения. Величина m_V при таком определении оказывается зависящей от диаметра телескопа и увеличивается с ростом D .

Данный подход помимо решения задачи априорного анализа и планирования эксперимента позволяет определить область наиболее эффективного применения метода спекл-интерферометрии для измерений двойных звезд. Например, с помощью 6-м телескопа вряд ли целесообразно проводить массовые измерения двойных звезд с мерой близости компонент $e > 25$ ($\rho \geq 0'',5$). Имея в виду высокоточные измерения (скажем, с точ-

ностью 1% по разделению) и полагая $M \sim 100$, $\eta = 10\%$, получаем для типичных условий наблюдения ($r_0 = 10$ см) $m_{v_1} < 8^m$ при $\Delta m = 0$. Учитывая неизбежные потери света в атмосфере, оптике телескопа и спекл-камеры, получаем $m_{v_1} \leq 6^m$, и это при условии, что вся информация, содержащаяся в спекл-изображениях, используется при измерениях полностью. Принимая во внимание последнее условие и тот факт, что спектр мощности и автокорреляционная функция составляют пару преобразования Фурье, приходим к выводу, что эти оценки справедливы и для цифровой спекл-интерферометрии [20], основанной на измерении и анализе автокорреляционных функций спекл-изображений.

При $\Delta m = 2^m, 5$ и тех же условиях наблюдений оценка разделения с точностью 1% уже невозможна. Если $M = 10^3$, то при $\Delta m = 0$ $m_{v_1} < 13^m$, а с учетом светопотерь $m_{v_1} \leq 11^m$.

Следует отметить, что разность блеска компонентов на практике определяется редко. На это есть несколько причин. При массовых наблюдениях двойных звезд процесс измерения, как правило, упрощают, сводя его к чисто геометрическим измерениям с помощью двухкоординатного микроскопа. В результате определяются только параметры ρ и ϕ . К тому же измерения контраста полос в спектре мощности, дающие информацию о величине Δm , могут быть искажены эффектами, порождаемыми применением конечной ширины полосы $\Delta\lambda$ и конечного времени экспозиции t_E , а также эффектами нелинейности и частичной неизопланатичности (при $e \gg 1$). Учесть эти эффекты трудно, что часто также приводит к отказу от определения Δm .

Настоящая статья завершает наше исследование потенциальных возможностей метода спекл-интерферометрии при решении различных задач измерения. Автор выражает благодарность В. Н. Дудинову, В. Г. Вакулику и В. С. Цветковой за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dudinov V. N., Konichek V. V., Kuz'menkov S. G. et al. Proc. IAU Colloq. № 67, 1982, p. 191.
2. Кузьменков С. Г. Астрон. журн., 1986, т. 63, с. 389.
3. Кузьменков С. Г. Астрон. журн., 1985, т. 62, с. 1201.
4. Roddier F., Gilli J. M., Lund G. J. Opt., 1982, v. 13, p. 263.
5. Дудинов В. Н., Ерохин В. Н., Кузьменков С. Г. и др. Докл. АН УССР. Сер. «А», 1979, № 7, с. 550.
6. Fried D. L. J. Opt. Soc. Amer., 1965, v. 55, p. 1427.
7. Roddier F., Gilli J. M., Vernin J. J. Opt., 1982, v. 13, p. 63.
8. Roddier F. Progress in optics, 1981, v. 19, p. 281.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
11. Dainty J. C., Greenaway A. H. J. Opt. Soc. Amer., 1979, v. 69, p. 786.
12. Dainty J. C., Greenaway A. H. Proc. IAU Colloq. № 50, 1979, p. 23.
13. Jones R. C. Photogr. Sci. Eng., 1958, v. 2, p. 57.
14. Fellgett P. B. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1958, v. 118, p. 224.
15. Никонов В. Б. В кн.: Курс астрофизики и звездной астрономии. Т. 1/Под ред. Михайлова А. А. М.: Наука, 1973, с. 392.
16. Dainty J. C. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1974, v. 169, p. 631.
17. Dainty J. C. In: Topics in Applied Physics, 1975, v. 9, p. 255.
18. Schneiderman A. M., Karo D. P. Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng., 1976, v. 75, p. 70.
19. Miller M. G. J. Opt. Soc. Amer., 1977, v. 67, p. 1176.
20. Blazit A., Vonneau D., Koechlin L., Labeyrie A. Astrophys. J. (Lett.), 1977, v. 214, p. L79.

Астрономическая обсерватория
Харьковского гос. университета
им. А. М. Горького

Поступила в редакцию
4.VI.1984