Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.
Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X
DOI: 10.31110/2413-1571
https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/2413-1571-2023-038-5-001 УДК 372.851

ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ПЛОСКОГО РОЗМІЩЕННЯ ТОЧОК ЗАСОБАМИ МЕТРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ПРИ ВИВЧЕННІ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Катерина ВАЛЬКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
katerynavalko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9746-018X
Валерій КУЗЬМИЧ ✉
Херсонський державний університет, Україна
vikuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8150-3456
Людмила КУЗЬМИЧ
Херсонський державний університет, Україна
lvkuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6727-9064
Олександр САВЧЕНКО
Херсонський державний університет, Україна
savchenko.o.g@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-4687-5542

АНОТАЦІЯ

Постановка проблеми. *При вивченні метричних просторів у здобувачів вищої освіти часто виникають труднощі з розумінням основних понять та властивостей цих просторів. Це, у значній мірі, є наслідком формалізації цих понять з одного боку, та збереження відповідних формулювань та назв, звичних для здобувачів зі шкільного курсу математики. Найпростіші поняття взаємного розміщення точок метричного простору, наприклад, прямолінійність їх розміщення, у різних просторах можуть набувати різних властивостей. Іноді ці властивості ніяким чином не узгоджуються з відповідними властивостями у звичних для здобувачів евклідових просторах. Для подолання вказаних труднощів доцільно використовувати методи геометричної інтерпретації та візуалізації цих властивостей. Доцільним, при цьому, є використання елементів метричної геометрії. Її методи дозволяють інтерпретувати геометричні особливості взаємного розміщення точок метричного простору у звичних для здобувачів вищої освіти декартових (прямокутних) системах координат. У роботі наведено приклади візуалізації властивості плоского розміщення чотирьох точок неевклідового метричного простору у прямокутній тривимірній системі координат.*

Матеріали та методи. *Результати роботи отримані на підставі аналізу діючих підручників з вищої математики для закладів вищої освіти, наукових публікацій та апробовані при читанні відповідного спецкурсу студентам спеціальності «014.04 Середня освіта (математика)» магістерського рівня вищої освіти. Для отримання зображень використовувалось динамічне геометричне середовище GeoGebra 3D.*

Результати. *На основі означення кута як упорядкованої трійки точок довільного метричного простору, та кутової характеристики цього кута, встановлено факт плоского розміщення чотирьох точок неевклідового метричного простору, та наведено приклади цифрової візуалізації цього розміщення за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D. Така візуалізація дає можливість знайомити здобувачів вищої освіти з найпростішими особливостями неевклідових геометрій.*

FORMATION OF THE CONCEPT OF FLAT ARRANGEMENT OF POINTS USING MEANS OF METRIC GEOMETRY IN THE STUDY OF METRIC SPACES

Kateryna VALKO
Kyiv National University named after Taras Shevchenko, Ukraine
katerynavalko@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9746-018X
Valerii KUZ'MICH ✉
Kherson State University, Ukraine
vikuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-8150-3456
Liudmyla KUZMICH
Kherson State University, Ukraine
lvkuzmichksu@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-6727-9064
Oleksandr SAVCHENKO
Kherson State University, Ukraine
savchenko.o.g@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-4687-5542

ABSTRACT

Formulation of the problem. *When studying metric spaces, higher education students often need help understanding these spaces' basic concepts and properties. It, to a large extent, is a consequence of the significant formalization of such concepts on the one hand and the preservation of the corresponding formulations and names familiar to students from a school mathematics course. The most straightforward concepts of mutual placement of points of metric space, for example, the rectilinearity of their arrangement, can acquire different properties in different spaces. Sometimes, these properties do not agree with the corresponding properties in Euclidean spaces. It is advisable to use geometric interpretation and visualization methods of these properties to overcome these difficulties. At the same time, it is appropriate to use elements of metric geometry. Its methods make it possible to interpret the geometric features of the mutual placement of points of metric space in Cartesian (rectangular) coordinate systems known to students. Moreover, it becomes possible to visualize these features with the help of graphic editors since they, as a rule, use numerical values of the coordinates of points to visualize them. The paper gives examples of visualization of the property of the flat arrangement of four points of non-Euclidean metric space in a rectangular three-dimensional coordinate system.*

Materials and methods. *The results of the work were obtained by analyzing existing higher mathematics textbooks for higher education institutions and scientific publications. They were tested while reading the corresponding special course for students of the specialty "014.04 Secondary education (mathematics)" of the master's level of higher education. The dynamic geometric environment GeoGebra 3D was used to obtain images.*

Results. *Based on the definition of an angle as an ordered trio of points of an arbitrary metric space and the angular characteristic of this angle, the fact of the flat arrangement of four points of a non-Euclidean metric space is established, with using the dynamic geometric environment GeoGebra 3D examples of digital visualization of this arrangement are given. Such a visualization makes it possible to familiarize students with higher education with the most straightforward features of non-Euclidean geometries.*

Для цитування:
Валько К., Кузьмич В., Кузьмич Л., Савченко О. Формування поняття плоского розміщення точок засобами метричної геометрії при вивченні метричних просторів. *Фізико-математична освіта*, 2023. Том 38. № 5. С. 7-11. DOI: 10.31110/2413-1571-2023-038-5-001
Валько, К., Кузьмич, В., Кузьмич, Л., & Савченко, О. (2023). Формування поняття плоского розміщення точок засобами метричної геометрії при вивченні метричних просторів. *Фізико-математична освіта*, 38(5), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-5-001

For citation:
Valko, K., Kuz'mich, V., Kuzmich, L., & Savchenko, O. (2023). Formation of the concept of flat arrangement of points using means of metric geometry in the study of metric spaces. *Physical and Mathematical Education*, 38(5), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-5-001
Valko, K., Kuz'mich, V., Kuzmich, L., & Savchenko, O. (2023). Formuvannia poniattia ploskoho rozmishchennia tochok zasobamy metrychnoi heometrii pry vyvchenni metrychnykh prostoriv [Formation of the concept of flat arrangement of points using means of metric geometry in the study of metric spaces]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 38(5), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-5-001

✉ Corresponding author

Висновки. *Аналітичний апарат метричної геометрії дає можливість сформувати узагальнене поняття плоского розміщення точок довільного метричного простору. Використання цифрових технологій, зокрема графічних редакторів, дозволяє зробити візуалізацію окремих особливостей взаємного розміщення точок довільного метричного простору. Використання достатньо простих аналітичних перетворень при побудові поняття плоского розміщення точок робить можливим знайомство здобувачів загальної середньої освіти, які навчаються у профільних класах з поглибленим вивченням математики, з основами неевклідових геометрій.*

КЛЮЧОВІ СЛОВА: точка; відстань; метрика; метричний простір; кут; кутова характеристика; прямолінійне та плоске розміщення точок.

Conclusions. *The analytical apparatus of metric geometry makes it possible to form a generalized concept of a flat arrangement of points in an arbitrary metric space. Digital technologies, particularly graphic editors, make it possible to visualize individual features of the mutual placement of points in an arbitrary metric space. The use of relatively simple analytical transformations when constructing the concept of a flat arrangement of points makes it possible for general secondary education students who study in special classes with in-depth study of mathematics to know themselves with the basics of non-Euclidean geometries.*

KEYWORDS: point; distance; metrics; metric space; angle; angular characteristic; rectilinear and flat arrangement of points.

ВСТУП

Постановка проблеми. Засвоєння здобувачами вищої освіти основних понять метричних просторів викликає у них певні труднощі, які пов'язані зі значним рівнем формалізації цих понять. У окремих випадках геометричні властивості неевклідових метричних просторів можуть прямо протирічити відповідним поняттям та властивостям класичних евклідових просторів. Ці протиріччя, значною мірою, можна пояснити здобувачам, побудувавши геометричну інтерпретацію окремого поняття у конкретному метричному просторі. У даній роботі пропонується використання елементів метричної геометрії для побудови таких інтерпретацій. Це дає можливість зробити не лише графічну інтерпретацію окремого поняття конкретного метричного простору, але і його візуалізацію у класичних декартових (прямокутних) системах координат, за допомогою цифрових технологій.

Актуальність дослідження. Серед досліджень, присвячених питанням геометризації метричних просторів, слід виокремити фундаментальні роботи (Менгер, 1928; Блюменталь, 1970; Бураго, 2001; Берже, 2009) у яких викладені основні положення та найновіші дослідження з метричної геометрії. Серед вітчизняних робіт, присвячених різноманітним питанням геометризації метричних просторів, можна відзначити роботи: (Dovgoshei & Dordovskii, 2009; Галущак, 2016). Питання геометричної інтерпретації та візуалізації геометричних властивостей метричних просторів у курсі вищої математики розглядались у роботах (Lenart & Rybak, 2017; Lenart, 2020; Lenart, 2021; Kuz'mich et al., 2022). Питання впровадження елементів теорії метричних просторів у шкільний курс математики та позакласну роботу з математики розглядались у дисертаційній роботі (Следзинський, 1973). Дана робота є логічним продовженням роботи (Валько et al., 2022). Зокрема, розглянуто випадок плоского розміщення точок у метричному просторі, та наведено приклад зміни геометрії простору при зміні його метрики. Наведено приклад переходу від об'ємного розміщення чотирьох точок простору до їх плоского розміщення. Це плоске розміщення продемонстроване за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D.

Мета статті. Метою статті є демонстрація можливості застосування елементів метричної геометрії до побудови геометричної інтерпретації та цифрової візуалізації основних понять теорії метричних просторів, з метою покращення їх засвоєння здобувачами вищої освіти.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

При отриманні головних результатів роботи використовувався аксіоматичний метод, з використанням системи аксіом метричного простору. Для отримання умови плоского розміщення точок метричного простору використовувався метод аналітичних перетворень, зокрема, метод визначників. Для отримання зображень використовувався метод геометричної інтерпретації та цифрової візуалізації, з використанням застосунку GeoGebra 3D.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

На початку роботи наведемо деякі із основних означень та фактів теорії метричних просторів. Базовими з них є поняття простору, точки простору, відстані між точками простору.

Нехай у множині X елементів x за певним правилом ρ будь-яким двом різним елементам x_1 і x_2 цієї множини можна поставити у відповідність єдине дійсне число $\rho(x_1, x_2)$ так, що при цьому будуть виконуватись умови:

1) $\rho(x_1, x_2) > 0$,
2) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$,
3) $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_3)$, для будь-якого елемента x_3 множини,

тоді таке правило ρ називають метрикою множини X, саму множину називають метричним простором з метрикою ρ і позначають (X, ρ), числове значення $\rho(x_1, x_2)$ – відстанню між елементами x_1 і x_2, а самі елементи – точками метричного простору. У подальшому, відстань між точками x_1 і x_2 будемо коротко позначати ρ_{12}. Найбільш простими прикладами метричних просторів є одновимірний (R^1), двовимірний (R^2) та тривимірний (R^3) евклідові простори, з якими учні знайомі зі шкільного курсу математики.

Прикладом метричного простору є простір $C_{[0;1]}$ – неперервних на відрізку $[0; 1]$ дійсних функцій. У цьому просторі відстань між функціями $f(x)$ і $g(x)$ задається формулою:

$$\rho(f; g) = max_{x \epsilon [0;1]} |f(x) - g(x)|. \quad (1)$$

У метричному просторі C_L інтегровних на відрізку $[0; 1]$ дійсних функцій відстань між функціями $f(x)$ і $g(x)$ задається формулою:

$$\rho(f; g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad (2)$$

(Колмогоров & Фомін, 1974; Давидов, 1979).

Якщо в умові 3) нерівність перетворюється у рівність, то кажуть, що точки x_1, x_2, x_3 розміщені прямолінійно у просторі X. Деяку множину точок метричного простору будемо називати прямолінійно розміщеною у цьому просторі, якщо будь-які її три точки розміщені прямолінійно.

Поняття плоского розміщення точок означається за допомогою поняття кута, утвореного трьома точками x_1, x_2, x_3 метричного простору (X, ρ). Таким кутом будемо називати упорядковану трійку точок (x_1, x_2, x_3), у якій точку x_2 називають вершиною кута, пари точок (x_1, x_2) і (x_2, x_3) – сторонами кута. Для його позначення можна використати класичне позначення кута: $\angle(x_1, x_2, x_3)$. Це означення відмінне від класичних означень кута, як об'єднання двох променів зі спільною вершиною, або частини площини, що обмежується цими променями, однак воно найбільш підходить для випадку дискретних метричних просторів, оскільки там не можливо використати класичні означення. Для вимірювання та порівняння кутів за величиною можна використати класичну теорему косинусів. При цьому, кутовою характеристикою кута $\angle(x_1, x_2, x_3)$ будемо називати дійсне число $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, яке знаходиться за формулою

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\rho^2(x_1, x_2) + \rho^2(x_2, x_3) - \rho^2(x_1, x_3)}{2\rho(x_1, x_2)\rho(x_2, x_3)},$$

або коротше

$$\varphi_{ijk} = \frac{\rho_{ij}^2 + \rho_{jk}^2 - \rho_{ik}^2}{2\rho_{ij}\rho_{jk}} \; (i, j, k = 1,2,3, \dots) \tag{3}$$

У основі означення плоского розміщення чотирьох різних точок метричного простору лежить факт рівності нулю об'єму тетраедра, вершинами якого є ці точки. Будемо казати, що чотири різні точки x_1, x_2, x_3, x_4 простору (X, ρ) плоско розміщені у цьому просторі, якщо виконується рівність (Валько et al., 2022).

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_{213} & \varphi_{214} \\ \varphi_{213} & 1 & \varphi_{314} \\ \varphi_{214} & \varphi_{314} & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\varphi_{213}\varphi_{214}\varphi_{314} - \varphi_{213}^2 - \varphi_{214}^2 - \varphi_{314}^2 = 0 \tag{4}$$

Попередню рівність можна вивести самостійно, не використовуючи поняття визначника, або ж ознайомити учнів з простішими властивостями визначників третього порядку, при розв'язуванні систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Деяку множину точок метричного простору будемо називати плоско розміщеною, якщо будь-які її чотири точки є плоско розміщеними у цьому просторі.

Розглянемо на прикладах окремі властивості плоского розміщення точок у різних просторах, та як впливає на ці властивості зміна метрики простору.

Приклад 1. У просторі $C_{[0;1]}$ візьмемо чотири точки (функції):

$$y_1 = x, \, y_2 = 0, \, y_3 = x - 1, \, y_4 = \tfrac{2\sqrt{3}}{3}(x - 0{,}5).$$

За формулою (1) знайдемо відстані між цими точками:

$$\rho_{12} = 1, \rho_{13} = 1, \rho_{14} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}, \rho_{23} = 1, \rho_{24} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}, \rho_{34} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

За формулою (3) знайдемо кутові характеристики:

$$\varphi_{142} = \varphi_{143} = \varphi_{243} = -0{,}5.$$

Підставивши ці значення у ліву частину формули (4), будемо мати:

$$1 + 2(-0{,}5)(-0{,}5)(-0{,}5) - (-0{,}5)^2 - (-0{,}5)^2 - (-0{,}5)^2 = 0.$$

Отже, точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщені у просторі $C_{[0;1]}$, причому, ніякі три з цих точок не розміщені прямолінійно (немає відстані, що дорівнює сумі двох інших). У геометрії Евкліда, у просторі R^2, точка y_4 є центром рівностороннього трикутника з вершинами у точках y_1, y_2, y_3, і тому у цьому просторі точки y_1, y_2, y_3, y_4, теж є плоско розміщені.

Зміна метрики простору може суттєво вплинути на його геометричні властивості. Щоб впевнитись у цьому, розглянемо функції з Прикладу 1 у просторі C_L.

Приклад 2. За формулою (2) метрики простору C_L, на відрізку $[0; 1]$, відстані між точками y_1, y_2, y_3, y_4 будуть:

$$\rho_{12} = 0{,}5, \rho_{13} = 1, \rho_{14} = 0{,}5, \rho_{23} = 0{,}5, \rho_{24} = \tfrac{\sqrt{3}}{6}, \rho_{34} = 0{,}5.$$

З отриманих значень відстаней випливає, що точки y_1, y_2, y_3, як і точки y_1, y_3, y_4, прямолінійно розміщені у просторі C_L, причому, як точка y_2, так і точка y_4 лежать між точками y_1 і y_3. У евклідовому просторі це означало б, що усі чотири точки розміщені прямолінійно, однак, нерівності

$$\rho_{12} + \rho_{14} = 0{,}5 + 0{,}5 = 1 > \tfrac{\sqrt{3}}{6} = \rho_{24}, \rho_{14} + \rho_{24} = 0{,}5 + \tfrac{\sqrt{3}}{6} > 0{,}5 = \rho_{12},$$

$$\rho_{12} + \rho_{24} = 0{,}5 + \tfrac{\sqrt{3}}{6} > 0{,}5 = \rho_{14},$$

вказують на те, що точки y_1, y_2, y_4, (аналогічно і точки y_2, y_3, y_4) не розміщені прямолінійно у просторі C_L. Тобто, зі зміною метрики простору змінились його геометричні властивості.

Тепер перевіримо, чи залишились точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщеними і у просторі C_L. Для цього, за формулою (3), знайдемо значення кутових характеристик:

$$\varphi_{213} = 1, \varphi_{214} = \tfrac{5}{6}, \varphi_{314} = 1.$$

Підставивши ці значення у формулу (4), будемо мати:

$$1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{6} - 1^2 - 1^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{36} \neq 0.$$

Таким чином, точки y_1, y_2, y_3, y_4 не є плоско розміщеними у просторі C_L (об'єм тетраедра з вершинами у цих точках не дорівнює нулю), і отже, зміна метрики вплинула також і на властивість плоского розміщення точок. По іншому можна сказати, що змінилась геометрія простору.

Наведені вище приклади 1 і 2 свідчать про можливість знайомства учнів старших класів або під час уроків математики, або на різноманітних видах неформальної освіти, з основами метричної геометрії та найпростішими властивостями неевклідової геометрії.

Сучасні цифрові технології дають можливість візуалізації окремих геометричних властивостей метричних просторів. Наприклад, за допомогою динамічного геометричного середовища GeoGebra 3D можна впевнитись, що точки y_1, y_2, y_3, y_4 плоско розміщені у просторі $C_{[0;1]}$, оскільки їхні образи у просторі R^3 плоско розміщені. Для побудови точок у цьому середовищі потрібні їхні координати. Авторами отримані формули для координат вершин тетраедра за довжинами його ребер, та створений застосунок для побудови зображення тетраедра за цими координатами (Валько et al., 2022). Ввівши значення довжин ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{14}, ρ_{23}, ρ_{24}, ρ_{34} з прикладу 1 у цей застосунок отримуємо наступне зображення (рис. 1).

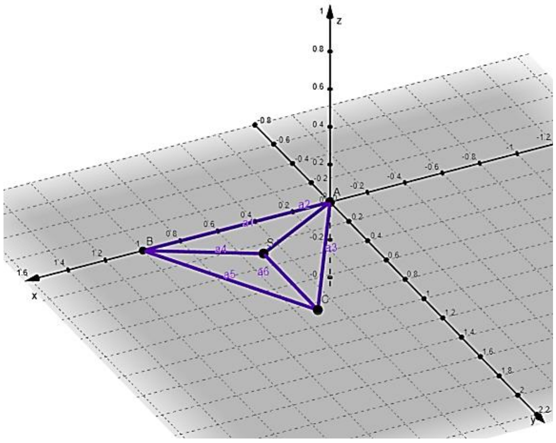

Рис. 1. Інтерпретація плоского розміщення точок $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{y_3}$, $\mathbf{y_4}$ у просторі $\mathrm{C}_{[0;1]}$

У тому, що усі чотири точки лежать у площині XOY можна впевнитись, повернувши зображення так, щоб точка споглядання лежала у цій площині (рис. 2).

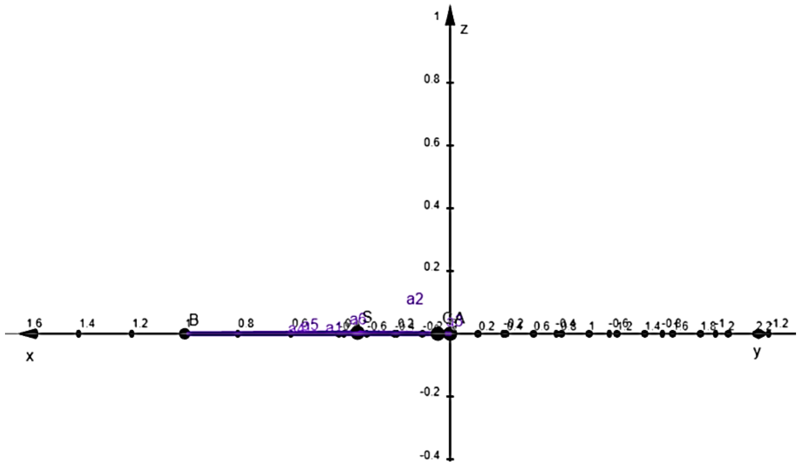

Рис. 2. Інтерпретація плоского розміщення точок $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{y_3}$, $\mathbf{y_4}$ у просторі $\mathrm{C}_{[0;1]}$ (вид з точки площини $\mathbf{XOY}$)

Цифрові технології, у більшості випадків, використовують наближені значення координат точок, тому візуалізації наведені на рисунках 1 і 2, носять ілюстративний характер, однак у достатній мірі відображають характер взаємного розміщення точок простору.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Наведений у даній роботі матеріал свідчить про можливість використання елементів метричної геометрії при вивченні теорії метричних просторів здобувачами вищої освіти. Аналітичний апарат метричної геометрії достатній для побудови геометричних інтерпретацій та цифрових візуалізацій основних понять та властивостей неевклідових метричних просторів. Використання елементів метричної геометрії полегшує розуміння здобувачами вищої освіти тих особливостей неевклідових метричних просторів, які носять геометричний характер. Матеріал даної роботи можна використати на різних видах неформальної освіти, знайомлячи з ним здобувачів загальної середньої освіти, які навчаються у профільних класах з поглибленим вивченням математики. Його застосування дасть змогу ознайомити учнів з найпростішими елементами неевклідової геометрії.

Подальші дослідження, на нашу думку, мають бути спрямовані на побудову аналітичної та геометричної інтерпретацій паралельного та перпендикулярного розміщення точок довільного метричного простору. Це значно розширить область застосування метричної геометрії при вивченні метричних просторів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Валько, К., Кузьмич, В., Кузьмич, Л., & Савченко, О. (2022). Інтерпретація взаємного розміщення точок метричного простору за допомогою графічних засобів. *Фізико-математична освіта*, 2(34), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001.
2. Галущак, С.І. (2016). Деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка. *Прикарпатський вісник НТШ. Число*, 1(33), 157–166.
3. Давидов, М.О. (1979). *Курс математичного аналізу*, *3*. Київ: Вища школа.
4. Колмогоров, А.М., & Фомін, С.В. (1974). *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*. Київ: Вища школа.
5. Следзинский, И.Ф. (1973). *Формирование понятий расстояния и метрического пространства у учащихся общеобразовательной средней школы.* Автореф. дис. ... канд. пед. наук. Київ: Київський державний педагогічний інститут ім. О. М. Горького.
6. Berger, M. (2009). *Geometry I*. Springer.
7. Blumenthal, L. (1970). *Theory and applications of distance geometry*. Chelsea Publishing Company.
8. Burago, D., Burago, Y., & Ivanov, S. (2001). *A course in metric geometry*. AMS.
9. Dovgoshei, A.A., & Dordovskii, D.V. (2009). Betweenness relation and isometric imbeddings of metric spaces. *Ukr. Math. J.*, 61(10), 1556-1567.
10. Kuzmich, V.I., & Kuzmich, L.V. (2021). Elements of non-Euclidean geometry in the formation of the concept of rectilinear placement of points in schoolchildren. *J. Phys.: Conf. Ser.*1840, 012004. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012004.
11. Kuz'mich, V.I., Kuzmich, L.V., Savchenko, A.G., & Valko, K.V. (2022). Geometric interpretation and visualization of particular geometric concepts at metric spaces study. *Journal of Physics: Conference Series*, 2288, 012024. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2288/1/012024.
12. Lénárt, I. (2021). Comparative Geometry in distance education. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840(1), 012003. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012003.
13. Lenart, I. (2020). The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere. *J. of Appl. Math. and Phys*, 8(10), 2286–2333. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.810171.
14. Lenart, I., & Rybak, A. (2017). Comparative Geometry in Primary and Secondary School. *The Pedagogy of Mathematics: Is There a Unifying Logic? Johannesburg: Mapungubwe Institute for Strategic Reflection (MISTRA)*, 107–124.
15. Menger, K. (1928). Untersuchungen uber allgemeine Metric. *Math. Ann.*, 75–163.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Valko, K., Kuzmich,V., Kuzmich, L., & Savchenko, O.(2022). Interpretatsiia vzaiemnoho rozmishchennia tochok metrychnoho prostoru za dopomohoiu hrafichnykh zasobiv [Interpretation of mutual location of points of metric space by help of graphic means]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 34(2), 7-11. https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-034-2-001. (in Ukrainian).
2. Halushchak, S. I. (2016). Deyaki heometrychni kryvi u sensi d-vidrizka [Some geometric curves in the sense of a d-segment]. *Prykarpats'kyy visnyk NTSH. Chyslo – Prykarpatsky herald of the NTSh. Numeric*, 1(33), 157–166 (in Ukrainian).
3. Davydov, M. O. (1979). *Kurs matematychnoho analizu. Chastyna 3 [Course of mathematical analysis. Part 3]*. Kyiv: Vyshcha shkola (in Ukrainian).
4. Kolmohorov, A. M. & Fomin, S. V. (1974). *Elementy teoriyi funktsiy i funktsional'noho analizu [Elements of the theory of functions and functional analysis]*. Kyyiv: Vyshcha shkola (in Ukrainian).
5. Sledzinskij, I. F. (1973). *Formirovanie ponjatij rasstojanija i metricheskogo prostranstva u uchashhihsja obshheobrazovatel'noj srednej shkoly [Formation of the concepts of distance and metric space in secondary school students]*. Extended abstract of candidate's thesis. KSPI named after A.M. Gorky (in Ukrainian).
6. Berger, M. (2009). *Geometry I*. Springer.
7. Blumenthal, L. (1970). *Theory and applications of distance geometry*. Chelsea Publishing Company.
8. Burago, D., Burago, Y. & Ivanov, S. (2001). *A course in metric geometry*. AMS.
9. Dovgoshei, A. A. & Dordovskii, D. V. (2009). Betweenness relation and isometric imbeddings of metric spaces. *Ukr. Math. J.,* 61(10), 1556–1567.
10. Kuz'mich, V. I. & Kuzmich, L. V. (2021). Elements of non-Euclidean geometry in the formation of the concept of rectilinear placement of points in schoolchildren. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840, 012004.
11. Kuz'mich, V. I., Kuzmich, L. V., Savchenko, A. G., & Valko, K. V. (2022). Geometric interpretation and visualization of particular geometric concepts at metric spaces study. *Journal of Physics: Conference Series*, 2288, 012024.
12. Lénárt, I. (2021). Comparative Geometry in distance education. *Journal of Physics: Conference Series*, 1840(1), 012003.
13. Lénárt, I. (2020). The Algebra of Projective Spheres on Plane, Sphere and Hemisphere. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 10(8**)**, 2286-2333.
14. Lénárt, I., & Rybak, A. (2017). *Comparative Geometry in Primary and Secondary School. In: The Pedagogy of Mathematics: Is There a Unifying Logic?*. Johannesburg: Mapungubwe Institute for Strategic Reflection (MISTRA), 107-124.
15. Menger, K. (1928). Untersuchungen uber allgemeine Metric. *Math. Ann.*, 75–163.