УДК 372

БАЛАКОВА О.Р.

ЗАДАЧА ЕРДЕША-СЕКЕРЕША ДЛЯ МНОГОКУТНИКІВ

У статті розглядаються частинні випадки задачі Ердеша-Секереша для опуклих многокутників, зокрема, для випадків чотирикутників та п'ятикутників.

Ключові слова: опуклі многокутники, комбінаторна геометрія, проблема Ердеша-Секереша.

The article considers partial cases of the Erdes-Sekeres problem for convex polygons, in particular, for the cases of quadrilaterals and pentagons.

Keywords: convex polygons, combinatorial geometry, Erdes-Sekereş problem.

Задача Ердеша-Секереша по праву вважається однією із перлин комбінаторної геометрії [1]. Вона відрізняється винятковою простотою та постановкою, а нетривіальність її розв'язання та досить широкі зв'язки із іншими галузями математики виводять її на передній край сучасної комбінаторики. Усі задачі Ердеша-Секереша полягають у відшуканні такого мінімального натурального числа *t*, при якому довільна множина точок загального положення на площині, що має потужність *t*, містить вершини «достатньо великого та регулярного» многокутника [2]. Як правило, регулярність означає опуклість, до якої, в залежності від умови задачі, додаються різні додаткові обмеження на кількість внутрішніх точок многокутника.

Ця задача виникла у 1934 році [3]. Постановка задачі визначається наступним чином. Розглянемо яку-небудь скінченну множину точок χ на площині і поставимо запитання: чи вірно, що в множині χ завжди знайдуться три точки, які є вершинами трикутника? Відповідь на це запитання несподівано негативна. Проте, якщо ми з самого початку будемо припускати, що в множині χ жодні три точки не лежать на одній прямій, тоді спрацьовує природна логіка і при умові $|\chi| \geq 3$ ми зможемо гарантувати наявність трикутників у χ.

А як тоді йдуть справи з опуклими чотирикутниками, опуклими п'ятикутниками тощо? Бажано отримати відповідь у тій же формі, що і у випадку трикутників, а саме: для кожного $n \in N, n \geq 3,$ бажано відшукати таку «граничну»величину $g(n) \in N$, щоб в кожній множині χ, яка не містить трійок точок на одній прямій і які мають не менш, ніж $g(n)$ елементів, знайшлись n вершин опуклого $n -$ кутника і щоб для $g(n) - 1$ описана властивість не виконувалась. Ось $g(3) = 3$, а чому дорівнюють $g(4), g(5)$ та інші? Взагалі, чи існують ці величини? Адже цілком може статися, що, скажемо, для будь-якого m знайдеться множина χ розміру m, в якій немає вершин опуклих десятикутників. Проблема Ердеша-Секереша як раз і полягає у знаходженні величин $g(n)$.

Чотирикутники

Очевидно, що $g(4) > 3$. Зрозуміло, що $g(4) = 4$ неможливо, оскільки точки можуть знаходитися у спільному положенні, і тим не менш, серед них може не бути вершин опуклих чотирикутників. Отже, $g(4) \geq 5$. Покажемо, що $g(4) = 5$, тобто переконаємося, що будь якій множині з п'яти точок на площині є опуклі чотирикутники. Тут нам знадобиться поняття опуклої оболонки множини точок. Опукла оболонка (скінченної) множини χ – це «найменший» опуклий многокутник, всередині чи на грані якого лежать всі точки з χ.

Нехай задані довільні п'ять точок на площині. Розглянемо їх опуклу оболонку. Або всередині неї наших точок немає, або всередині неї одна точка, або всередині неї дві точки (рис. 1).

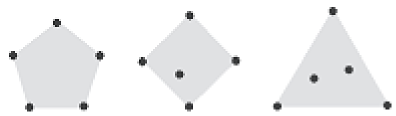

Рис. 1

У перших двох випадках все очевидно, а у третьому випадку міркування полягає у наступному: проведемо через дві внутрішні точки пряму; з огляду на загальність положення, ця пряма не пройде через жодну вершину трикутника, але «зачепить» одразу дві його сторони; візьмемо дві внутрішні точки і дві вершини сторони трикутника, яка залишалася; їх опукла оболонка і є шуканим чотирикутником.

П'ятикутники

Є два приклади, які показують, що $g(5) \geq 9$. Це приклади з восьми точок загального положення і без опуклих п'ятикутників. Вони зображені на рис. 2.

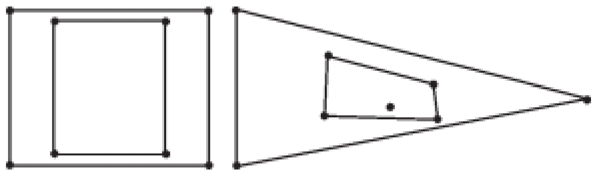

Рис. 2

Покажемо, що насправді $g(5) = 9$. Отже, нехай задані дев'ять точок, які утворюють множину χ загального положення на площині. Розглянемо опуклу оболонку q множини χ. З виду спільності положення у q не може бути менше трьох вершин. Якщо у q п'ять або більше вершин, то опуклий п'ятикутник знайдений, і далі говорити про що-небудь не має сенсу. Інакше у q три або чотири вершини. Останні шість або п'ять точок із множини χ знаходиться всередині q. Візьмемо тепер їх опуклу оболонку і назвемо її g. Знову: або у g три або чотири вершини. На даному етапі ми маємо наступну картину. Якщо у процесі побудови опуклих оболонок п'ятикутник ще не знайдений, то в нас таких вкладених один в одну оболонок вже дві – q і g, і кожна з них є або трикутник, або чотирикутник. А всього точок дев'ять. Тоді процес можна продовжити.

Подивимося всередину g. Там, очевидно, одна, дві або три точки із χ. Позначимо через i кількість вершин многокутника q, через j – кількість вершин многокутника J, а через k – кількість точок всередині J. Зрозуміло, що їх опукла оболонка $K -$ це точка, відрізок або трикутник. Нарешті, залишається вивчити лише чотири випадки, і всі вони зображені на рис. 3. З природних міркувань назвемо їх випадками (або ще конфігураціями виду) (4, 4, 1), (4, 3, 2), (3, 4, 2) і (3, 3, 3).

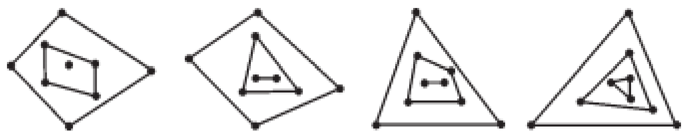

Рис. 3

Нехай ми довели, що в будь-яких конфігураціях виду (3, 3, 2), (4, 3, 1) і (3, 4, 2) все ж таки є опуклий п'ятикутник. Тоді зовсім легко бачити, що кожна із конфігурацій малюнка 3, в свою чергу, містить одну із вказаних конфігурацій.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Шклярский Д.О. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – М. : Наука, Физматлит, 1974. – 384 с.
2. Яглом И.М. О комбинаторной геометрии / И.М. Яглом. – М. : Наука, 2004. – 186 с.

3. Erdos P. Some more problems in elementary geometry / P. Erdos // Austral. Math. Soc. Gaz. – 5 (1978). – P. 52-54.

Рекомендує до друку науковий керівник ст. викладач Григор'єва В.Б.