МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

КОВАРІАНТНІ ФУНКТОРИ НА КАТЕГОРІЇІ КОМПАКТІВ ТА НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "магістр"

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.01 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)» другого (магістерського) рівня вищої освіти Карпенко Катерина Вікторівна

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор Савченко Олександр Григорович

Рецензент професорка кафедри інформаційних технологій та фіз.-мат. дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова, докторка педагогічних наук Літвінова М.Б.

Івано-Франківськ – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Топологія – це досить молодий та дуже важливий розділ математики. Відомий французький математик Андре Вейль сказав, що «за душу кожного математика борються ангел топології і диявол абстрактної алгебри, висловивши цим, по-перше, незвичайну витонченість і красу топології і по-друге, те, що вся сучасна математика є химерним переплетенням ідей топології і алгебри» [4].

Розпочавши свою діяльність як галузь геометрії, топологія досить швидко знайшла своє застосування і в інших галузях математики. Існує думка, що топологія – це не наука, а це особливий стан душі, оскільки вона має свою власну мету.

Топологію є результатом продуктивної діяльності математиків протягом останніх двох століть, проте можна зазначити, що раніше були зроблені кілька відкриттів, що тісно пов'язані з топологією. Одним з найбільших з них, безсумнівно, є формула, що встановлює зв'язок між вершинами, ребрами та гранями простого многогранника: цей факт помітив ще Декарт у 1640 р. Декілька пізніше цю формулу було заново відкрито та застосовано Ейлером у 1752 р. Характерні риси цієї формули саме як топологічного твердження стали очевидними згодом, саме після того, як Пуанкаре побачив у «формулі Ейлера» та деяких її узагальненнях одну з основних теорем топології [7]. Тим не менш можна сказати, що як розділ науки топологія виникла та виокремилася в кінці XIX ст. завдяки А. Пуанкаре. Процес побудови топології та розв'язування її внутрішніх задач виявився досить складним та довготривалим: він продовжується близько 70-80 років. Не дивлячись на існуючі проблеми в топології, досить значна кількість науковців присвятили життя її дослідженню, серед яких можна зазначити П.С.

Александрова, Є.В. Щепіна, В.Г. Болтянського, В.А. Єфремовича, Л.Б. Шапиро, В.В. Федорчука та інших [13].

Метою дослідження є дослідження питання характеру поведінки коваріантних функторів на категорії компактів та неперервних відображень.

Завдання дослідження:

1) аналіз наукової математичної літератури з теми дослідження;
2) вивчення поведінки та властивостей функторів на паракомпактних просторах;
3) розкриття питання стосовно можливості ознайомлення здобувачів середньої освіти з найпростішими прикладами просторів, що виникають під дією функторів експоненціального типу.

Об'єкт дослідження: коваріантні функтори експоненціального типу.

Предмет дослідження: компакти, які виникають під дією експоненціальних функторів exp_2 та exp_3.

Методи, що використовували у дослідженні: теоретичний аналіз літератури з теми дослідження, методи неперервних відображень множин.

Теоретичне значення дослідження: систематизовані основні властивості функторів експоненціального типу на просторах різного ивду. *Практичне значення* полягає у розгляді можливості запровадження елементів теорії функторів у шкільному курсі на факультативних заняттях з математики в школі.

Дослідження було виконано в межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація результатів дослідження. За результатами виконаного дослідження було опубліковано тези в альманаху «Магістерські студії» (Херсонський державний університет).

В структурі роботи виділено три основні розділи. Перший розділ містить теоретичний матеріал, пов‘язаний з поняттям функторів на категорії компактів та неперервних відображень. В другому розділі наведено твердження, що стосуються поведінки функторів на паракомпактних простраx та зв'язок між функторами експоненціального типу та метризуємістю просторів. В третьому розділі розглянуто питання можливості знайомства здобувачів середньої освіти з найпростішими прикладами просторів, які виникають завдяки дії функторів експоненціального типу.

РОЗДІЛ 1
ПОНЯТТЯ ФУНКТОРІВ НА КАТЕГОРІЇ КОМПАКТІВ ТА НЕПЕРЕРВНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

1.1. Означення та властивості метрики Хаусдорфа

Фраза "ми безперервно деформуємо тіло" означає досить реальне фізичне сприйняття. Але неперервність здійсненої деформації означає, що ми інтуїтивному рівні порівнюємо фази деформації між собою, оцінюючи при цьому їх схожість. Існує багато способів здійснити вибір певної оцінки цієї близькості [2]. Ми розглянемо один з них.

Спочатку зауважимо, що в якості оцінки не підходить використовувати відстань між множинами: наприклад, множини можуть перетинатися, тоді відстань між ними буде 0, або множини можуть досить сильно відрізнятися одна від одної за рахунок найбільш віддалених частин. Таким чином, оцінка має бути такою, щоб близькість однієї множини відносно всіх своїх частин означала і близькість з іншою множиною. Якщо перекласти це формулювання на мову математичних формул, то ми одержуємо відхилення $\alpha(F_1, F_2)$ множини F_2 в метричному просторі:

$$\alpha(F_1, F_2) = inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0, F_2 \subset O_\varepsilon F_1\},$$

де

$$O_\varepsilon F = \{y : y \in X, inf\{p(y,t) : t \in F\} < \varepsilon\} – \varepsilon – \text{окіл множини } F.$$

Легко навести приклад такої ситуації, коли значення цього відхилення нескінченне. Існують й інші приклади, що свідчать про те, що для того, щоб за такою оцінкою стояла реальна геометрія, потрібно накласти певні обмеження на множини, що розглядаються [15].

Позначимо через $\exp X$ множину усіх замкнених множин, які є підмножинами топологічного простору X, а через $exp_c X -$ множину усіх бікомпактних замкнених підмножин [6] простору X. Розглянемо певне відхилення α на множині $exp_c X$ усіх компактних підмножин метричного простору X, тоді ми можемо вважати, що в наведеній вище формулі F_1 і $F_2 -$ це компакти, що лежать у просторі X. При таких умовах значення $\alpha(F_1, F_2)$ має наступний зміст: родина $\{O_\varepsilon F_1 : \varepsilon > 0\}$ є відкритим покриттям простору X і, завдяки компактності множини F_2, з неї можна вилучити скінченну підродину, яка покриває множину F_2. Ця підродина підпорядковується відношенням «включення» (тобто з довільних двох її елементів один міститься в іншому), тому існує найбільший елемент $O_\delta F_1$; очевидно, $\alpha(F_1, F_2) \leq \delta$. Відмітимо ще й інші властивості розглянутого відхилення α: для довільних компактних підмножин F_1, F_2 і F_3 простору X справедливі твердження:

1) $\alpha(F_1, F_2) \geq 0$,
2) $\alpha(F_1, F_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $F_2 \subset F_1$,
3) $\alpha(F_1, F_3) \leq \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3)$.

Доведення зазначених властивостей прості. Певних пояснень потребує лише третє твердження. Наведемо ці пояснення. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Множина F_2 міститься в $(\alpha(F_1, F_2) + \varepsilon) -$ околі множини F_1, а множина F_3 міститься в $(\alpha(F_2, F_3) + \varepsilon) -$ в околі множини F_2. За аксіомою трикутника [21] маємо, що довільна точка множини F_3 віддалена від множини F_1 на відстань, яка менша за

$$\delta = \alpha(F_1, F_2) + \varepsilon + \alpha(F_2, F_3) + \varepsilon.$$

(тобто для довільної точки $x \in F_3$ існує точка $y \in F_1$, для якої $p(x, y) < \delta$, $\varepsilon -$ окіл множини), і отже,

$$\alpha(F_1, F_3) \leq \alpha(F_1, F_2) + \alpha(F_2, F_3) + 2\varepsilon.$$

Але так як це вірна нерівність при будь-якому $\varepsilon > 0$, то ми отримаємо твердження 3).

Відстань Хаусдорфа між двома компактними підмножинами F_1 і F_2 метричного простору X – це число

$$p_H(F_1, F_2) = max\{\alpha(F_1, F_2), \alpha(F_2, F_1)\}.$$

Серед наведених вище властивостей розглянутого відхилення немає властивості симетрії. Але воно не задовольняй цій властивості, тому не є метрикою. На противагу від відхилення функції p_H – симетричне, тому з властивостей розглянутого відхилення одержуємо, що вона є метрикою на множині $exp_c X$.

Ми розглянули лише один з можливих варіантів оцінки близькості множин. Він, з одного боку, має очевидну геометричну основу, а тому природно, що цей варіант виникає в цілому ряді завдань, а з іншого боку цей варіант дає нам приклад частинного випадку топології метричних просторів, яка є фундаментальною математичною теорією.

1.2. Функтор експоненти

Останні роки спостерігається тенденція дослідження загальних властивостей коваріантних функторів, які діють в Comp. У працях Е.В. Щепіна [31] побудована розгорнута та досить змістовна загальна теорія функторів. В своїй роботі він розглядав цілий ряд природних та мало обмежених властивостей функтору та навів означення нормального функтору, що має значну роль. Використовуючи до вивчення властивостей нормальних функторів створений ним же метод незчисленних оборотних спектрів, Е.В. Щепін займався дослідженням властивостей просторів виду $F(K^\tau)$, де F – нормальний функтор, K – це компакт і τ – це непарний кардинал [16].

Термін (функтор) означає *коваріантний функтор*, що діє на базі категорії Comp на цю ж саму категорію. Наступні означення надав Є.В. Щепін.

«*Функтор F* називається *неперервним*, якщо для будь-якого оборотного спектру $S = \left\{X_\alpha, p_\alpha^\beta; U\right\}$ існує оборотний спектр

$F(S) = \left\{F(X_\alpha), F(p_\alpha^\beta); U\right\}$, який породжено відображеннями

$$F(p_\alpha): F(\varprojlim S) \to F(X_\alpha),$$

де p_α – наскрізні проекції з $\varprojlim S$ в X_α, причому відображення $\varprojlim F(p_\alpha)$ з простору $F(\varprojlim S)$ в простір $\varprojlim F(S)$ є гомеоморфізмом» [7].

Функтор F називається функтором, який *зберігає вагу*, якщо $wF(X) = Wx$ для довільного нескінченного бікомпакту X.

«Функтор F називається *мономорфним*, якщо для довільного вкладення i бікомпакту X в бікомпакт Y відображення

$$F(i): F(X) \to F(Y)$$

також є вкладенням» [7].

З умови мономорфності функтору F випливає, що $F(A)$ можна вважати підпростором $F(X)$, якщо $A \leq X$. Повне ототожнення $F(A)$ з підпростором $F(X)$ здійснюється за допомогою вкладення $F(i)$, де $i: A \to X$ – це тотожне вкладення. У подальшому в роботі будемо розглядати лише мономорфні функтори.

«Функтор F називається *епіморфним*, якщо він зберігає сюр'єктівность відображень бікомпактів» [7].

Функтор F називається таким, що зберігає перетин, якщо для довільної родини $\{X_\alpha: \alpha \in U\}$ замкнених підмножин довільного бікомпакту X маємо

$$\bigcap_{\alpha \in U} F(X_\alpha) = F(\bigcap_{\alpha \in U} X_\alpha).$$

Функтор F називається функтором, який *зберігає прообрази*, якщо для будь-якого неперервного відображення f бікомпакту X в бікомпакт Y та для довільної замкненої підмножини $B \leq Y$ маємо:

$$F(f^{-1}B) = F(f)^{-1}F(B).$$

Коваріантний функтор $F: Comp \to Comp$ називається *нормальним*, якщо він є неперервним, таким, що зберігає вагу, перетин та прообрази, мономорфним та епіморфним і переводить одноточковий простір в одноточковий, а пустий – у пустий.

Проте, як показав у своїх роботах М.М. Зарічний [11], не всі умови є визначальними. При визначенні нормального функтору, який є незалежним, можна відмовитися від умов мономорфності та від збереження перетинів.

Нехай $f: X \to Y -$ неперервне відображення. Покладемо для $C \in \exp X$ $(\exp f)(C) = f(C)$. Тоді множина C як замкнена підмножина бікомпакту X саме буде бікомпактом. Її неперервний образ $f(C)$ також буде бікомпактним. Але біокомпакт замкнений у будь-якому існуючому Хаусдорфовому просторі. Таким чином, $f(C)$ замкнена в Y, тобто $f(C) \in \exp Y$. Отже, визначено відображення

$$\exp f\colon \exp X \to \exp Y.$$

При цьому можна відмітити, що визначене відображення $\exp f$ неперервне. Це випливає з рівності, яку можна перевірити автоматично:

$$(\exp f)^{-1}(O\langle U_1, \dots U_n\rangle) = O\langle f^{-1}(U_1), \dots f^{-1}(U_n)\rangle.$$

Для деякого топологічного простору X введемо позначення: позначимо через id_x тотожне відображення простору X на себе. Для двох довільних відображень

$$f: X \to Y \text{ і } g: Y \to Z$$

позначимо через $g^\circ f: X \to Z$ їх композицію (результат послідовного виконання цих двох відображень). Так звана теорема про неперервність складної функції стверджує, що композиція двох неперервних відображень є неперервним відображенням [4].

Операція exp, яку можна застосовувати до бікомпактів, а також до неперервних відображень, має наступні очевидні властивості:

1) $\exp(id_x) = id_{\exp x}$;

2) $\exp(g^\circ f) = \exp g^\circ \exp f$.

Отже, операція exp ставить у відповідність кожному бікомпакту X бікомпакт $\exp X$, а кожному неперервному відображенню $f: X \to Y$ – неперервне відображення $exp\ f: exp\ X \to exp\ Y$, при цьому виконуються умови 1) та 2). Усе вище зазначене можна сформулювати так: операція exp є (коваріантним) функтором, що діє на родині (або на категорії) Comp усіх бікомпактов та усіх їх неперервних відображень. Цей функтор має назву *функтор експоненти*, або *функтор гіперпростору замкнених множин*.

Для бікомпакту X позначимо через $exp^c X$ родину таких $A \in \exp X$, що є зв'язними. Тоді множина $exp^c X$ буде замкненою підмножиною експоненти $\exp X$. Дійсно, візьмемо $A \in \exp X\ /A \in \exp X$. Тоді множину A в силу її незв'язності можна подати у вигляді суми двох непустих замкнених підмножин A_1 і A_2, які не перетинаються Але в бікомпакті довільні дві замкнені множини, що не перетинаються, можна вмістити в околи, які мають пустий перетин. Розглянемо такі околи U_1 і U_2 для множин A_1 і A_2. Тоді множина $O\langle U_1\,, U_2\rangle$ буде околом A в $\exp X$, причому який не перетинається з $exp^c X$. Це випливає з того, що оскільки будь-який континуум, який міститься в сумі двох відкритих множин, які мають пустий перетин, повинен міститися в одній з цих множин-доданків [5].

Таким чином, множина $exp^c X$ замкнена в бікомпакті $\exp X$ і тому вона сама є бікомпактом. Цей бікомпакт має назву *гіперпростір континуумів бікомпакту* X, або його *континуальною експонентою*. Розглянемо тепер $f: X \to Y -$ неперервне відображення. Введемо позначення: $exp^c f$ – це обмеження відображення $expf: expX \to expY$ на бікомпакт $exp^c X$. Виходячи з того, що неперервним образом зв'язної множини є зв’язна множина [11], відображення $exp^c f$ переводить бікомпакт $expX$ в бікомпакт $expY$. Легко, крім того, перевірити, що для континуальної експоненти справедливі умови функторіальності:

1) $exp^c(id_x) = id_{exp^c X}$;

2) $exp^c(g^\circ f) = exp^c g^\circ exp^c f$.

Отже, операція exp^c є коваріантним функтором в категорії бікомпактов. Він має назву *функтора континуальної експоненти*.

Оскільки для довільного бікомпакту X бікомпакт $exp^c X$, зазвичай, міститься в бікомпакті $expX$, а для будь-якого неперервного відображення $f: X \to Y$ є комутативною діаграма

$$\exp X \xrightarrow{\exp f} \exp Y$$

$$exp^c X \xrightarrow{exp^c f} exp^c Y,$$

тоді функтор континуальної експоненти exp^c є підфунктором функтора експоненти exp.

Позначимо тепер для натурального n через $exp_n X$ множину всіх не більш, ніж $n-$точкових підмножин множини X. Будь-яка скінченна підмножина хаусдорфового простору замкнена в ньому [19]. Отже, $exp_n X \subset expX$. Множина $exp_n X$, яку можна розглядати як підпростір експоненти $expX$, замкнена. Дійсно, якщо $A \in \exp X / exp_n X$, то знайдуться $n+1$ різних точок $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$. В цих точках, згідно з тим, що простір X хаудорфовий, знайдуться околи $U_1, \dots, U_{n+1}$, що попарно між собою не перетинаються. Тоді множина $O = O\langle U_1, \dots, U_{n+1}, \mathrm{X}\rangle$ буде околом A в $expX$. В той самий час будь-який елемент $B \in O$ має перетинатися з усіма U_i і, отже, повинен містити хоча б $n+1$ точку. Отже, $O \cap exp_n X = \emptyset$. Таким чином, множина $exp_n X$ замкнена в $expX$ і тому є бікомпактом.

Для неперервного відображення $f: X \to Y$, вважаючи, що $exp_n f$ дорівнює обмеженню відображення $expf$ на бікомпакт $exp_n X$, отримаємо неперервне відображення

$$exp_n f: exp_n X \to exp_n Y.$$

Зрозуміло також, що операція exp_n задовольняє умовам 1) і 2) функторіальності та є коваріантним функтором. Цей функтор називається *функтором гіперсиметричного* $n -$ го *степеня*. Функтор гіперсиметричного $n -$ го степеня exp_n по аналогії з функтором континуальної експоненти, є підфунктором функтора експоненти exp.

Особливий інтерес являє собою випадок $n = 1$. Якщо ми не будемо розрізняти мж собою точки простору X та його одноточкові підмножини, то в результаті одержимо природне ототожнення множин X і $exp_1 X$. Це ототожнення є гомеоморфізмом. Особливо легко в цьому переконатися у випадку метричного компакту X: відстані між точками x і y та між множинами одноточковими $\{x\}$ і $\{y\}$ однакові. Проте навіть у випадку неметризуємого простору топологічність відображення

$$\{\cdot\}: X \to exp_1 X$$

перевірити дуже легко [23].

Отже, тотожний функтор Id, природно, ізоморфний функтору exp_1 і тому являє з себе підфунктор експоненти. Більш того, справедлива наступна діаграма з включень, що демонструє зв’язки між згаданими вище підфункторами експоненти:

$$\begin{array}{c} exp_2 \subset \cdots \subset exp_n \subset \cdots exp \\ Id = exp_1 \quad \subset \quad exp^c\,(1)\,. \end{array}$$

1.3. Приклади просторів, які виникають під дією функторів експоненціального типу

Розгляд поняття топологічного простору є не лише гарним інструментом для конструювання нових топологічних об'єктів, але й надає цікаві методи досліджень топологічних просторів та їх неперервних відображень. Існує можливість подати цей простір X у вигляді більш простих просторів, або навіть у вигляді неперервного способу, і ця можливість найчастіше гарантує нам достатньо гарні властивості простору X. Проте в даний момент нас цікавлять функціональні властивості.

Для деякого кардинального числа k (скінченного або нескінченного) операція піднесення просторів до k - го степеня триває до коваріантного функтору в категорії топологічних просторів. Цей k - степеневий функтор будемо надалі позначати через Π^k, хоча простір $\Pi^k X$ та відображення $\Pi^k f$ найчастіше краще позначати за допомогою природних символів X^k і f^k. Відображення

$$f^k: X^k \to Y^k$$

визначається за допомогою координат: точці $x \in X^k$ з координатами $x_a, a \in k$ відповідає точка $f^k(x) = y$ з координатами $y_a = f(x_a)$.

Тотожний функтор, зрозуміло, буде ізоморфний підфунктору статичного функтора Π^k для будь-якого k. Цей ізоморфізм можна здійсними за допомогою діагонального вкладення простору X в його k - ий степінь X^k, що ставить у відповідність кожній точці $x \in X$ точку з X^k з координатами, що дорівнюють x [16].

Обмежимося випадком натуральних $k = n$ та бікомпактного X. Розглянемо наступне відображення:

$$\pi_n: X^n \to exp_n X \ .$$

Воно ставить у відповідність кожній точці $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ множину координат цієї точки. Неважко перевірити, що π_n є неперервним відображенням бікомпакту X^n на бікомпакт $exp_n X$. Отже, гіперсиметричний n-ий степінь бікомпакту X є фактор-простором його n-го степеня стосовно розбиття, що породжується таким відношенням еквівалентності: точки $x, y \in X^n$ вважаються еквівалентними, якщо множини координат цих точок однакові. Цей факт разом з урахуванням того, що для довільного неперервного відображення $f: X \to Y$ комутативною є діаграма, можна сформулювати наступним чином:

функтор exp_n гіперсиметричного n-го степеня є фактор-функтором функтора Π^n піднесення до n-го степеня.

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\pi_n x"'] & Y^n \arrow[d, "\pi_n y"] \\
exp_n X \arrow[r, "exp_n f"] & exp_n Y
\end{tikzcd}$$

Наведемо інші приклади фактор-функторів функтору Π^n. На n-му степені X^n бікомпакта X діє симетрична група S_n всіх перестановок [17], як група перестановок координат. Множину орбіт цієї операції з фактор-топологією позначимо через SP^nX. Отже, точки простору $SP^nX -$ це деякі скінченні підмножини (або класи еквівалентності) X^n. При цьому «дві точки $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ вважаються еквівалентними, якщо існує така перестановка $\sigma \epsilon S_n$, що $y_i = x_{\sigma(i)}$» [6].

Простір SP^nX називається n *-им симетричним степенем* простору X. Тепер можна розібратися, чому exp_nX називається гіперсиметричним степенем простору X. Будемо називати відношення еквівалентності, за допомогою яких простори SP^nX та exp_nX виходять з X^n, відповідно відношеннями симетричної та гіперсиметричної еквівалентності. Різні симетрично еквівалентні точки з X^n будуть також і гіперсиметрично еквівалентними. Так, для $x \neq y$ точки $(x, x, y), (x, y, y) \in X^3$ гіперсиметрично еквівалентні, проте вони не еквівалентні симетрично. Таким чином, відношення гіперсиметричної еквівалентності є більш сильним, ніж відношення симетричної еквівалентності. Сильнішим в тому розумінні, що його класи еквівалентності більші. Саме тому це відношення називається відношенням симетричної або гіперсиметричної еквівалентності, а простір, що відповідає йому, $exp_nX -$ гіперсиметричним степенем.

Нехай $f: X \to Y$ – деяке неперервне відображення. Для кожного класу еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)] \in SP^nX$ покладемо

$$SP^n f[(x_1, \dots, x_n)] = [(f(x_1), \dots, f(x_n))] =..$$

Тим самим ми задамо відображення $SP^n f: SP^n X \to SP^n Y$.

Його неперервність випливає з комутативності діаграми та факторних відображень $\pi_n^s x$ і $\pi_n^s y$, які підпорядковуються відношенням симетричної еквівалентності на X^n і Y^n.

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "\pi_n^s x"'] & Y^n \arrow[d, "\pi_n^s y"] \\ SP^n X \arrow[r, "SP^n f"] & SP^n Y \end{tikzcd}$$

Нескладно пересвідчитись, що побудована таким чином операція SP^n є коваріантним функтором в категорії бікомпактов. Функтор цей називається *функтором n-го симетричного степеня*. Комутативність розглянутої вище діаграми свідчить, що функтор SP^n є фактор-функтором функтору піднесення до n-го степеня [21].

Таким чином, функтор SP^n одержується за допомогою факторизації функтору Π^n. В свою чергу, факторизуючи функтор SP^n, можна отримати функтор exp_n. Дійсно, клас симетричної еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)]$ однозначно визначає його клас гіперсиметричної еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)]^{hs}$. Тоді завдяки цьому можна визначити відображення

$$\pi_n^h: SP^n X \to exp_n X,$$

яке задає функтор exp_n, як фактор-функтор SP^n. Зрозуміло, що для будь-якого бікопакту є комутативною діаграма:

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_n^s"'] & & exp_n X \\ & SP^n X \arrow[ur, "\pi_n^h"'] & \end{tikzcd}$$

Поняття симетричного степеня допускає певне узагальнення. Нехай $G -$ деяка довільна підгрупа групи S_n. Тоді вона як група перестановок координат також діє на X^n. Відповідно на X^n виникає відношення G —симетричної еквівалентності. Фактор-простір X^n по відношенню G-симетричного степеня простору X будемо позначати через $SP^n_G X$. Операція SP^n_G буде коваріантним функтором в категорії бікомпактів, ця операція має назву *функтор G-симетричного степеня*. Якщо $G = S_n$, то $SP^n_G = SP^n$. Якщо ж група G містить лише один одиничний елемент, то $SP^n_G = \Pi^n$. Більш того, якщо G_1, G_2 — такі підгрупи симетричної групи S_n, що $G_1 \subset G_2$, то має місце наступна послідовність, яка зазвичай визначає факторизацію функторів [8]:

$$\Pi^n \to SP^n_{G_1} \to SP^n_{G_2} \to SP^n.$$

Приклад 1.1. Розглянемо X — відрізок $[0,1]$ числової прямої R. Визначимо симметричний 2-степінь $SP^2X = exp_2X$. Для цього врахуємо, що функтор exp_2 являє з себе фактор-функтор функтору Π^2. Тоді відображення $\pi^2 : X^2 \to exp_2X$ визначається тим, що пари точок (x,y) і (y,x) "склеюються". Це склеювання можна здійснити наступним чином. Потрібно взяти квадратний аркуш паперу, що зображує одиничний квадрат площини, потім накреслити на ньому діагональ Δ, яка містить точки виду (x,x), зігнути квадрат вздовж цієї діагоналі до суміщення двох прямокутних рівнобедрених трикутників T_1 і T_2 та склеїти ці трикутники (рис. 1). Трикутник, що одержується від такого склеювання квадрата, буде зображенням 2-го симетричного степеня відрізку.

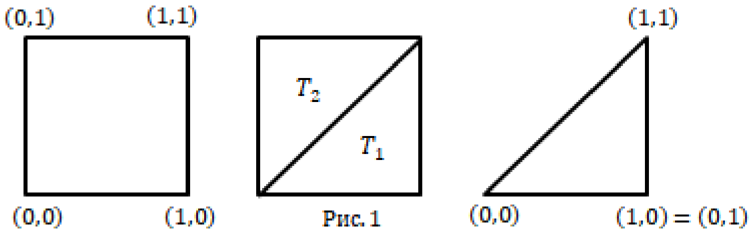


Рис. 1

Цей результат можна одержати і по-іншому. Діагональ Δ поділяє квадрат I^2 на два симетричних трикутники T_1 і T_2:

$$T_1 = \{(x,y) \in I^2 : x \geq y\},$$

$$T_2 = \{(x,y) \in I^2 : x \leq y\}.$$

Тоді відображення π_2, яке визначається тільки на трикутнику T_1, буде взаємно однозначним неперервним відображенням компакту T_1 на хаусдорфовий простір $exp_2 I$. Подібні відображення обов'язково мають бути гомеоморфними [17].

Таким чином, ми знову продемонстрували той факт, що симетричний квадрат $exp_2 I$ можна природно ототожнити з половиною квадрата I^2.

Приклад 1.2. Доведемо, що симетричний квадрат кола $SP^2S^1 = exp_2 S^1$ буде гомеоморфний листу Мебіуса. Як відомо [16], лист Мебіуса можна отримати з квадрата ототожненням центрально симетричних точок двох протилежних сторін квадрата. Якщо в якості квадрата розглянути одиничний квадрат площини $I^2 = \{(x, y): 0 \leq x, y \leq 1\}$, то тоді будуть ототожнюватися пари точок $(0, y)$ і $(1, 1-y)$ (рис.1.1):

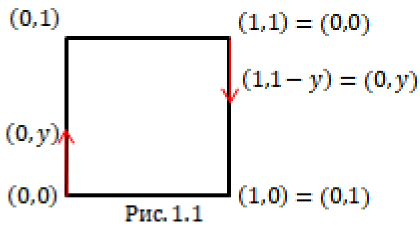


Рис. 1.1

Однією з найбільш цікавих топологічних властивостей листа Мебіуса є те, що він являє собою односторонню поверхню. «Якщо розглядати локально, то в кожній своїй точці лист Мебіуса має дві сторони. Але якщо в деякому місці ви розпочнете зафарбовувати одну із сторін листа Мебіуса в певний колір, то продовжуючи цей процес неперервно, ви замалюєте в цей колір весь лист Мебіуса. Цікаво відмітити, що якщо по аналогії з листом Мебіуса ви склеюєте таку ж смужку паперу, перевертаючи один з її кінців двічі, то ви отримаєте, хоча й перекручену, але вже двосторонню поверхню. Ця поверхня гомеоморфна циліндру (смужці, склеєної без будь-яких перекручень) та відрізняється від звичайного циліндра тільки своїм розташуванням в тривимірному евклідовому просторі» [14].

Виникає питання, чому компакт $exp_2 S^1$ гомеоморфний листу Мебіуса? Коло S^1 являє собою відрізок з ототожненими кінцями. Таким чином, квадрат кола – це тор, що можна отримати із звичайного квадрату за допомогою ототожнення пар протилежних, однаково напрямлених його сторін (рис. 1.2).

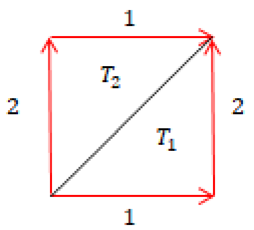


Рис. 1.2

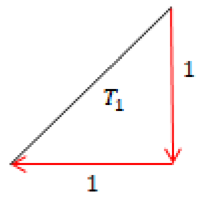


Рис. 1.3

Відображення $\pi_2 : S^1 \times S^1 \to exp_2 S^1$, як і у попередньому прикладі, ототожнює верхній трикутник T_2 квадрата, що визначає зображення тору на рис 1.2, з нижнім трикутником T_1. При цьому верхню сторону 1 будемо ототожнювати з правою стороною 2, а ліву сторонау 2 – з нижньою стороною 1. Отже, компакт $exp_2 S^1$ одержується з прямокутного трикутника T_1, катети якого ототожнені, як показано на зображенні способу на рис. 1.3. Покажемо, що склеєний таким чином трикутник співпадає з листом Мебіуса. Для цього спочатку розріжемо цей трикутник, а потім склеїмо в дещо іншій послідовності. Зробимо розріз трикутника T_1 по висоті, яка проведена з прямого кута на гіпотенузу, та задамо нумерацію і напрямок сторін для двох отриманих трикутників T_1^1 і T_1^2, склеювання яких і визначає шуканий компакт $exp_2 S^1$ (рис. 1.4).

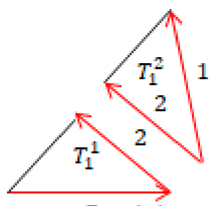


Рис. 1.4

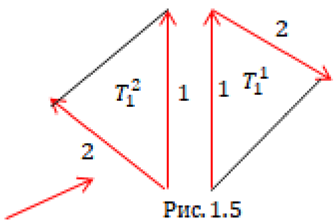
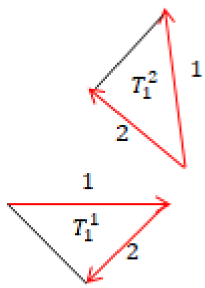


Рис. 1.5



Тепер ми склеюємо сторони 1 трикутників T_1^1 і T_1^2. З’єднати саме ці сторони за допомогою певного руху площини, при цьому не накладаючи трикутники один на інший, не можна. Тому перевернемо трикутник T_1^1, відобразивши його симетрично відносно сторони 1, а потім з'єднаємо сторони 1 за допомогою руху перевернутого трикутника T_1^1 в площині (рис. 1.5). Після склеювання сторін 1 ми отримаємо квадрат, у якому залишиться склеїти лише пару протилежних сторін 2, які напрямлені в різні сторони. На цьому і завершується доведення того, що лист Мебіуса гомеоморфний симетричному квадрату кола.

Приклад 1.3. Тепер обчислимо континуальну експоненту $exp^c S^1$ кола. Підконтинуумами кола є його дуги (в тому числі й нульової довжини) і саме коло. Але на відміну від підконтинуумів відрізку довільна пара точок $x_1,\ x_2$ кола S^1 визначає пару взаємно доповняльних дуг з кінцями в точках $x_1,\ x_2$.

Побудуємо гомеоморфізм r кола B^2 на $exp^c S^1$. Поставимо у відповідність центру кола B^2 найбільший підконтинуум кола S^1, тобто саме це коло. Нехай тепер точка $x \epsilon B^2$, що знаходиться на відстані $a > 0$ від центру. Проведемо через точку x радіус R_x кола B^2 та позначимо кінець його через $\varphi(x)$. Тепер співставимо кожну точку x дуги кола S^1 довжиною $2\pi(1-a)$ з центром в точці $\varphi(x)$. Зрозуміло, що так побудоване відображення $r: B^2 \to exp^c S^1$ неперервне та взаємно однозначне, тобто є гомеоморфізмом.

Гомеоморфізм r має ту властивість, що й точки кола $S^1,$ а саме він залишає на місці, тобто можна розглядати його як багатозначну ретракцію [5] кола B^2 на його межу S^1. Зазначена конструкція допускає природне узагальнення для випадку більш високих розмірностей і грає важливу роль в геометричній топології.

РОЗДІЛ 2
КОВАРІАНТНІ ФУНКТОРИ НА ПАРАКОМПАКТНИХ ПРОСТОРАХ

2.1. Функтор exp_c в категорії паракомпактних p-просторів

В цьому розділі будемо розглядати паракомпактні перисті простори (паракомпактні p-простори). Нагадаємо, що ідея розгляду паракомпактних p-просторів належить А.В. Архангельському [3]. У своїй роботі А.В. Архангельський визначив новий важливий клас просторів, більш вузький, ніж клас регулярних просторів, але в той же час який містить усі метричні та всі локально компактні простори. Нагадаємо, що топологічні простори називається *паракомпактними*, якщо в кожне їх відкрите покриття можна вписати локально скінченне відкрите покриття. Покриття простору X називається *локально скінченним*, якщо у кожної точки $x \in X$ існує окіл, що перетинає лише скінченне число елементів покриття.

В якості основної характеристики паракомпактних p-просторів будемо користуватися наступною теоремою, яка належить А.В. Архангельському.

Теорема 2.1. Для того, щоб топологічний простір можна було повністю відобразити на метричний простір, необхідно й достатньо, щоб він був паракомпактним p-простором.

Нагадаємо, що *повним* називається замкнене неперервне відображення, при якому прообрази всіх точок компактні. Нам також знадобиться наступний факт [20]:

Твердження 2.1. Повний прообраз компакту є компактом.

Твердження 2.2. Родина всіх паракомпактних p-просторів та їх повних відображень є категорією.

Доведення.

Дійсно, для будь-яких двох повних відображень f і g таких, що область визначення g співпадає з областю значень f визначена їх композиція $h = g \circ f$, яка також є повною [20]. Далі, для будь-якого паракомпактного p-простору X визначене єдине повне відображення $id_X : X \to X$, таке що

$$id_Y \circ f = f = f \circ id_X$$

для будь-якого повного відображення $f : X \to Y$. Крім того, для довільної трійки повних відображень справедливо:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Твердження 2.2 доведено.

Надалі будемо називати цю категорію категорією $\mathcal{P}$.

Гіперпростір простору X, тобто простір $\exp(X)$, а також експоненціальне відображення $\exp(f)$ вже були розглянуті у розділі 1 для компактних просторів та їх неперервних відображень. В цьому розділі нам знадобиться означення простору компактних підмножин довільного хаусдорфового простору та деякі його властивості.

Позначимо через $exp_c(X)$ множину усіх компактних замкнених підмножин простору X. Розглянемо її як підпростір простору $\exp(X)$. Нагадаємо, що відкриту базу топології простору $\exp(X)$ утворюють множини виду:

$$O < U_1, \dots, U_n \geq \left\{ A \in \exp(X) : A \subset U_1 \bigcup \dots \bigcup U_n \, ; A \cap U_i \neq \emptyset \right\},$$

$$\text{для } \forall i = 1, \dots, n$$

де U_i – відкриті в X множини [17]. При розгляді простору $exp_c(X)$ будемо далі використовувати позначення $O(U_1, \dots, U_n)$ для множин, які є перетинами відкритих множин $O < U_1, \dots, U_n >$ простору $\exp(X)$ з підпростором $exp_c(X)$

Далі розглянемо підпростір простору $exp_c(X)$, що складається з усіх скінченних k-точкових підмножин. Позначимо через $exp_k X$

множину всіх непустих підмножин простору X потужності, яка не перевищує скінченного число k.

Надалі нам знадобиться той факт, що простір $exp_k X$ замкнений в просторі $exp_c(X)$ і при $k = 1$ співпадає з самим простором X [7].

Нехай f – повне відображення паракомпактного p-простору X в паракомпактний p-простір Y. Тоді визначимо наступним чином відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в простір $exp_c(Y)$: покладемо

$$(exp_c(f)(F) = f(F)\ .$$

Твердження 2.3. Нехай $f -$ це повне відображення паракомпактного p-простору X на паракомпактний p-простір Y. Тоді відображення $exp_c(f)\colon exp_c(X) \to exp_c(Y)$ є епіморфізмом.

Доведення.

Випливає з того, що для будь-якої компактної підмножини $F \subset Y$ її повний прообраз $f^{-1}(F)$ також компактний. Твердження 2.3 доведено.

Твердження 2.4. Нехай f – неперервне відображення паракомпактного p-простору X в паракомпактний p-простір Y. Тоді відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в простір $exp_c(Y)$ також неперервне.

Доведення.

Для доведення неперервності відображення $exp_c(f)$ достатньо перевірити наступну рівність:

$$\left(exp_c(f)\right)^{-1}\left(O(U_1, \dots, U_n)\right) = O(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n))$$

Дійсно,

$$\left(exp_c(f)\right)^{-1}\left(O(U_1, \dots, U_n)\right) = \{F \in exp_c X : f(F) \in O(U_1, \dots, U_n)\} = \{F \in exp_c X : f(F) \subset \cup_{i=1}^{n} U_i,\ f(F) \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всіх } i = 1, \dots, n\}.$$

Це в свою чергу співпадає з

$$\{F \in exp_c X : F \subset f^{-1}(\cup_{i=1}^{n} U_i), F \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset \text{ для всіх } i = 1, \dots, n\}.$$

Згідно з означенням базисних множин простору $exp_c X$, це і є множина $O(f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n))$. Твердження 2.4 доведено.

Надалі нам знадобиться визначення $k-$просторів, а також деякі властивості $k-$просторів. Топологічний простір X називається $k-$простором, якщо в ньому замкнена будь-яка множину, перетин якої з будь-яким компактом замкнений.

Теорема 2.2. Неперервне відображення $f: X \to Y$ хаусдорфового простіру Xв $k-$простір Y повне тоді і тільки тоді, якщо $f^{-1}(Z)$ кожної компактної множини $Z \subset Y$ компактний.

Лема 2.1. Нехай $f-$ повне відображення паракомпактного p-простору X в паракомпактний p-простір Y. Тоді із того, що простір $exp_c(Y)$ є $k-$простором випливає, що відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в просторі $exp_c(Y)$ повне .

Доведення.

Згідно з [3] достатньо довести, що для будь-якої компактної підмножини Z, що лежить в просторі $exp_c(Y)$, її прообраз $(exp_c f)^{-1}(Z)$ також компактний.

Для початку перевіримо, що для даної множини Z множина $Z^0 = \cup Z$ є компактною підмножиною Y.

Нехай $\{U_a: a \in A\}$ – довільне відкрите покриття множини Z^0. Тоді для кожного елементу $F^b \in Z$ і кожної множини U_a такої, що $U_a \cap F^b \neq \emptyset$, розглянемо множину $W_a^b = U_a \cap F^b$. Зрозуміло, що $\{W_a^b: a \in A\}$ – відкрите покриття F^b. Так як всі множини F^b компактні, із покриття $\{W_a^b: a \in A\}$ можна виділити скінченне підпокриття $\{W_a^b: i = 1, \ldots, n\}$. Зафіксуємо покриття із n відкритих множин $U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b$ таких, що

$$U_{a_1}^b \cap F^b = W_{a_i}^b.$$

Ми отримаємо, що F^b також покривається множинами $U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b$ і перетинається з кожною з них. Тобто $F^b \in O(U_{a_1}^b, \ldots, U_{a_n}^b)$ в просторі $exp_c(Y)$. Таким чином, ми отримаємо відкрите покриття для Z: для будь-якої точки F^b простору Z знайдеться відповідна їй відкрита множина $O^b = O(U_{a_1}^b, \dots, U_{a_n}^b)$, така що $F^b \in O^b$. Так як Z- компактне, виділимо із цього покриття скінченне підпокриття

$$\{O^{b_j}: j = 1, \dots, k\}, \text{ де } O^{b_j} = O(U_{a_1}^{b_j}, \dots, U_{a_n}^{b_j}) .$$

Зафіксувавши відповідні $U_{a_i}^{b_j}$ із означення множин O^{b_j}, ми отримаємо шукане скінчене підпокриття для Z^0.

Дійсно, для довільної точки $x \in Z^0$ знайдеться такий елемент $F^b \in Z$, що $x \in F^b$, а отже, і відкрита множина $O(U_{a_1}^b, \dots, U_{a_n}^b)$ така, що

$$x \in F^b \subset \cup_{i=1}^{n} U_{a_i}^b.$$

Отже, Z^0 компактне. Тоді, так як відображення f повне, множина $f^{-1}(Z^0)$ компактна. З цього випливає, що $exp_c(f^{-1}(Z^0)$) також є компактом.

Відмітимо, що має місце включення

$$\left(exp_c(f)\right)^{-1}(Z) \subset exp_c(f^{-1}(Z^0)).$$

Нехай K – довільна точка множини $\left(exp_c(f)\right)^{-1}(Z)$. Тоді K – компактна підмножина X і $f(K)$ лежить в Z, а отже, $f(K)$ є підмножиною Z^0 і $K \subset f^{-1}(Z^0)$. Тобто $K \in exp_c(f^{-1}(Z^0))$.

Так як $exp_c(f)$ неперервне за твердженням 2.4, то $\left(exp_c(f)\right)^{-1}(Z)$ – замкнена підмножина компактного простору $exp_c(f^{-1}(Z^0))$, а отже, і саме є компактним простором.

Таким чином, із теореми 2.1 випливає, що відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в простір $exp_c(Y)$ повністю. Лему 2.1 доведено.

Твердження 2.4. Нехай f – повне відображення паракомпактного p-простору X в метричний простір Y. Тоді відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в простір $exp_c(Y)$ також повне.

Доведення.

Оскільки простір Y метризується, то простір $exp_c(Y)$ також метризуємий і, отже, задовольняє першій аксіомі зчисленності [7]. Нагадаємо, що кожен простір з першою аксіомою зчисленності є $k-$ простором. Лема 2.1 завершує доведення твердження 2.4.

Твердження 2.5. Нехай X – паракомпактний p-простір. Тоді $exp_c(X)$ $-$ також паракомпактний p-простір.

Доведення.

Нехай X – паракомпактний p-простір. За теоремою 2.2, існує повне відображення f із X на деякий метричний простір Y. Тоді простір $exp_c(Y)$ також є метричним (і, відповідно, паракомпактним p-простором згідно [12]), а відображення $exp_c(f)$ згідно тверджень 2.4 і 2.2 є повним відображенням $exp_c(X)$ на $exp_c(Y)$, отже, простір $exp_c(X)$ є паракомпактним p-простором. Твердження 2.5 доведено.

Хаусдорфовий простір X називається *простором точково-зчисленного типу*, якщо для кожної точки $x \in X$ знайдеться компактна множина $F(x)$, яка лежить в X така, що $x \in F(x)$ і характер множини $F(x)$ в просторі X зчисленний.

Твердження 2.6. Нехай f $-$ повне відображення паракомпактного p-простору X в паракомпактний p-простір Y. Тоді відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в простір $exp_c(Y)$ також повне.

Доведення.

Так як X і Y $-$ паракомпактні p-простори, то, за твердженням 2.2, $exp_c(X)$ і $exp_c(Y)$ $-$ також паракомпактні p-простори. Відомо [8], що кожен цілком регулярний перистий простір є простором точково-зчисленного типу, а отже, будь-який паракомпактний p-простір є $k-$ простором. Далі, з того, що простір $exp_c(Y)$ є $k-$ простором, згідно твердження 2.1 випливає, що відображення $exp_c(f)$ повне. Твердження 2.6 доведено.

Наслідок 2.1. Нехай X – паракомпактний p-простір, A — замкнена підмножина X. Тоді простір $exp_c(A)$ є замкненим підпростором простору $exp_c(X)$.

Доведення.

Як відомо [2], кожний замкнений підпростір паракомпакту є паракомпактом. З іншого боку, замкнений підпростір довільного перистого простору також є перистим [1]. Звідси випливає, що замкнений підпростір паракомпактного p-простору також є паракомпактним p-простором.

Далі, визначено вкладення $i: A \to X$, яке, очевидно, є повним. Отже, визначено відображення $exp_c(f)$ паракомпактного p-простору $exp_c(A)$ в паракомпактний p-простір $exp_c(X)$, яке, згідно твердження 2.3 також є повним, тому простір $exp_c(A)$ є замкненим підпростором простору $exp_c(X)$. Наслідок 2.1 доведено.

Твердження 2.7. Операція exp_c є коваріантним функтором із категорії $\mathcal{P}$ в категорію $\mathcal{P}$.

Доведення.

Нехай X, Y – паракомпактні p-простори, f – повне відображення X в Y. Тоді простори $exp_c(X), exp_c(Y)$ також є паракомпактними p-просторами, а відображення $exp_c(f)$ простору $exp_c(X)$ в простір $exp_c(Y)$ також повне. Окрім того, безпосередньо з означення функтору exp_c випливає виконання умов

$$exp_c(id_X) = id_{exp_c X} \text{ і } exp_c(g \circ f) = (exp_c g) \circ (exp_c f).$$

Твердження 2.7 доведено.

2.2. Функтори та метризуємість паракомпактних p-просторів

В даному параграфі розглядаються різні умови метризуємості паракомпактних p-просторів, зокрема, узагальнюється відома теорема

Катетова [26] на випадок паракомпактних M-просторів [3]. Зауважимо, що клас паракомпактних M-просторів в точності збігається з класом паракомпактних p-просторів.

Твердження 2.8. У будь-якому недискретному просторі точково-зчисленного типу знайдеться зчисленна незамкнена підмножина.

Доведення.

Нехай X – недискретний простір точково-зчисленного типу і точка $x \in X$ не є ізольованою. Якщо в точці x виконана перша аксіома зчисленності, то в якості зчисленної незамкненої підмножини візьмемо послідовність точок $\{x_i: i = 1,2, \ldots\}$, яка збігається до x. Якщо в точці x не виповнена перша аксіома зчисленності, то, так як X– простір точково-зчисленного типу, то знайдеться компакт K такий, що $x \in K \subset X$ і $\chi(K, X) \leq \omega_0$. Відомо, що для будь-яких двох компактних підмножин F_1 і F_2 хаусдорфового простору X, таких, що $F_1 \subset F_2$, має місце нерівність

$$\chi(F_1, X) \leq \chi(F_1, F_2)\chi(F_2, X) \text{ [12].}$$

Тоді для $x \in K \subset X$ має місце формула

$$\chi(x, X) \leq \chi(x, K) \times \chi(K, X).$$

Так як $\chi(x, X)$ незчисленний, характер $\chi(x, K)$ також незчисленний. Отже, компакт K нескінчений і тому містить зчисленну незамкнену множину, також не замкнену в X. Дійсно, візьмемо довільну зчисленну (нескінченну) підмножину $G \subset K$. У випадку, якщо G замкнена, вона є компактом і не дискретна. Тобто G містить принаймні одну неізольовану точку, відкинувши яку ми отримаємо шукану зчисленну незамкнену підмножину. Твердження 2.8 доведено.

У подальшому нам знадобиться класична теорема Катетова [26]:

Теорема 2.3. Нехай $X \times Y$ є наслідково нормальним. Тоді або всі зчисленні підмножини X замкнені, або Y повністю нормальний.

Нагадаємо, що повністю нормальним називається нормальний простір, всі замкнені підмножини якого є G_δ множинами [2].

Твердження 2.9. Нехай X – не дискретний паракомпактний p-простір, X^3 – наслідково нормальний. Тоді простір X^2 повністю нормальний.

Доведення.

Нехай X – не дискретний паракомпактний p-простір. Тоді, згідно з твердженням 2.6, в X знайдеться зчислена незамкнена підмножина. Так як X^3 – наслідково нормальний, із теореми 2.2 випливає, що простір X^2 повністю нормальний. Твердження 2.9 доведено.

Теорема 2.4. Паракомпакт X з діагоналлю типу G_δ метризуємий тоді і тільки тоді, якщо X допускає повне відображення на метризований простір.

Нагадаємо, що простір X називається M-*простором* [3], якщо його можна квазіповно відобразити на деякий метричний простір Y. *Квазіповним* називається таке замкнене відображення f простору X на простір Y, при якому прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки y простору Y є злчисленно-компактною підмножиною простору X. В класі паракомпактних просторів M-простори співпадають з перистими просторами в сенсі А.В.Архангельського.

Далі, із теореми 2.2, теореми 2.3 і твердження 2.8 безпосередньо випливає узагальнення теореми Катетова для паракомпактних M-просторів:

Твердження 2.10. Нехай X – паракомпактний M-простір, куб якого є наслідково-нормальним простором. Тоді X- метризований простір.

Розглянемо, «забуваючи порядок», відображення $\pi: X^2 \to exp_2X$, яке переводить точку $x \in X^2$ з координатами x_1, x_2 в двоточкову (або одноточкову, при $x_1 = x_2$) множину $\{x_1, x_2\}$ – елемент простору exp_2X.

Твердження 2.11. Відображення $\pi: X^2 \to exp_2X$ неперервне.

Доведення.

Достатньо довести, що множини виду $\pi^{-1}(O(U_1, U_2))$, а також $\pi^{-1}(O(U))$, де $O(U_1, U_2), O(U)$ – базисні відкриті в exp_2X множини, відкриті в X^2.

Має місце рівність

$$\pi^{-1}\big(O(U_1, U_2)\big) = \{(x_1, x_2): x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\} \cup = \{(x_1, x_2): x_1 \in U_2, x_2 \in U_1\}.$$

Таким чином,

$$\pi^{-1}\big(O(U_1, U_2)\big) = (U_1 \times U_2) \cup (U_2 \times U_1)$$

– відкрита підмножина в X^2. Твердження 2.11 доведено.

Твердження 2.12. Нехай X – паракомпактний p-простір, exp_2X повне та нормальне. Тоді простір X метризований.

Доведення.

Множина exp_1X замкнена в exp_2X і, відповідно, має тип G_δ. Відобразимо простір X^2 в простір exp_2X відображенням π і скористаємось тим, що воно неперервне. Тоді

$$\pi^{-1}(exp_1X)) = \{(x, x): x \in X\} = \triangle$$

також є множиною G_δ. Тоді простір X – паракомпакт з діагоналлю типу G_δ, що допускає повне відображення на метризований простір, а отже, згідно теореми 2.3, простір X метризовано. Твердження 2.12 доведено.

Родина множин називається *σ-дискретною*, якщо вона може бути представлена як зчисленне об’єднання дискретних родин. Нам також знадобиться теорема метризації Бінга [9]: топологічний простір метризуємий тоді і тільки тоді, коли він регулярний і має σ-дискретну базу.

Твердження 2.13. Нехай X – паракомпактний p-простір з єдиною неізольованою точкою x_0. Тоді якщо $\chi(x_0, X) = \omega_0$, то X метризований простір, якщо ж $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$, то простір $exp_3X \setminus X$ не наслідково-нормальний.

Доведення.

Нехай

$$\chi(x_0, X) = \omega_0, \sigma_{x_0} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$$

– зчисленна база в точці x_0. Тоді родина $\gamma = \{U_i: i = 1,2, \dots\} \cup \{\{x\}: x \neq x_0\}$ є σ-дискретной базою в X. Отже, згідно з теоремою метризації Бінга, простір X метризуємий. Припустимо, що $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$. Згадаємо, що паракомпактний p-простір Xє простором точково-зчисленного типу. Тобто існує компакт $K \subset X$ такий, що $x_0 \in K, \chi(K, X) \leq \omega_0$. Відомо, що для двох компактних підмножин F_1і F_2 хаусдорфового простір X, таких, що $F_1 \subset F_2$, має місце нерівність

$$\chi(F_1, X) \leq \chi(F_1, F_2)\chi(F_2, X).$$

Отже, має місце формула

$$\chi(x_0, X) \leq \chi(x_0, K) \times \chi(K, X).$$

Звідки випливає, що $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$ і, відповідно, компакт K неметризуємий. Крім того, відомо, що якщо для компакту K простір $exp_3 K \setminus K$ наслідково-нормальний, то компакт метризуємий. Отже, простір $exp_3 K \setminus K$ не може бути наслідково-нормальним. Так як $exp_3 K \setminus K \subset exp_3 X \setminus X$, то простір $exp_3 X \setminus X$ також не є наслідково-нормальним простором. Твердження 2.13 доведено.

Твердження 2.14. Нехай X – паракомпактний p-простір, $exp_3 X \setminus X$ наслідково-нормальний. Тоді X метризуємий.

Доведення.

У випадку, якщо простір X дискретний, то твердження виконується. Припустимо, що X не дискретний. Відомо, що локально метризуємий паракомпакт метризований, тому нам достатньо довести локальну метризованість X. Оскільки простір X не дискретний, в X знайдеться неізольована точка x_0, нехай $x \in X \setminus \{x_0\}$. Нехай Ox і Ox_0 – околи точок x і x_0 і,з замиканнями, які не перетинаються. Покладемо $A = [Ox], B = [Ox_0]$. Розглянемо добуток $(exp_2 \mathrm{A}) \times \mathrm{B}$ і побудуємо його вкладення φ: $(exp_2\text{A}) \times \text{B} \to exp_3X$ наступним чином. Для точок $\{x, y\} \in exp_2\text{A}, \{z\} \in \text{B}$, покладемо

$$\varphi(\{x, y\}, z) = \{x, y, z\} \in exp_3X.$$

Очевидно, що φ ін'єктивне, і тому ми ототожнюємо множину $(exp_2\text{A}) \times \text{B}$ з підпростором exp_3X.

Перевіримо, що φ – вкладення. Для цього покажемо, що довільна множина U відкрита в $(exp_2\text{A}) \times \text{B}$ тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді

$$U = V \cap ((exp_2\text{A}) \times \text{B}),$$

де V – відкрита в exp_3X. Нехай U –д відкрита в $(exp_2\text{A}) \times \text{B}$ множині, $U = O(U_1, U_2) \times U_3$, де U_1, U_2 – відкриті підмножини A, U_3 – відкрита підмножина B. Тоді візьмемо відкриті в X множини W_1, W_2, W_3 такі, що

$$W_1 \cap (A \cup B) = U_1, W_2 \cap (A \cup B) = U_2, \ W_3 \cap (A \cup B) = U_3.$$

Тоді множина $V = O(W_1, W_2, W_3)$ відкрита в exp_3X. Крім того, в перетині V з $(exp_2\text{A}) \times \text{B}$ отримаємо в точності множину

$$U = O(U_1, U_2) \times U_3.$$

Тому можна вважати, що $(exp_2\text{A}) \times \text{B} \subset exp_3X$.

Далі,

$$\varphi((exp_2\text{A}) \times \text{B}) \subset exp_3X \setminus X \ ,$$

так як І$\varphi(z)$І≥ 2 для всіх $z \in (exp_2\text{A}) \times \text{B}$. Тому $(exp_2\text{A}) \times \text{B}$ є підмножиною $exp_3X \setminus X$ і, відповідно, $(exp_2\text{A}) \times \text{B}$ наслідково-нормальний.

Згідно з теоремою 2.3, або всі зчисленні підмножини B замкнені, або простір $exp_2\text{A}$ повно-нормальний. Але B – замкнена підмножина паракомпактного p-простору, отже, сама є паракомпактним p-простором. Так як x_0 – неізольована точка, то B – нескінчена і, згідно з твердженням 2.6, містить зчисленні незамкнені підмножини. Отже, $exp_2\text{A}$ повно-нормальний і, згідно з твердженням 2.10, A – метризований. Отримуємо, що X локально метризований, окрім, може бути, точки x_0. Якщо в X знайдеться ще одна неізольована точка, то підставивши її замість x_0 отримаємо, що X локально метризований, і тим самим твердження доведено. Припустимо, що X – простір з єдиною неізольованою точкою. У цьому випадку формулювання твердження випливає з твердження 2.13. Дійсно, якщо $\chi(x_0, X) = \omega_0$, то X – метризований простір. Якщо ж $\chi(x_0, X) \geq \omega_1$, то простір $exp_3 X \setminus X$, згідно з твердженням 2.12, не є наслідково-нормальним, що суперечить формулюванню твердження. Твердження 2.14 доведено.

РОЗДІЛ 3
ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ КОВАРІАНТНИХ ФУНКТОРІВ В ШКОЛІ

В середині XIX ст. з’явилася абсолютно нова тенденція в геометрії, яка у подальшому стала однією з головних рушійних сил сучасної математики. Предметом цієї нової галузі, яка отримала назву топологія (або аналіз situs), є «вивчення властивостей геометричних фігур, які зберігаються навіть тоді, коли ці фігури зазнають таких перетворень, що руйнують всі їх метричні та проективні властивості» [12].

Топологію достатньо важко визначити. Опис цієї дисципліни набагато складніший за ті формулювання, які наведені у довідниках та енциклопедіях для арифметики ("Наука про додатні дійсні числа" – Новий колегіальний словник Вебстера або "Мистецтво маніпулювання числовими значеннями та їх взаємозв'язками" – Енциклопедія Britannica) або геометрією ("Вивчення [математичних] властивостей простору" – Енциклопедія Britannica). Марк Барр, наприклад, визначає математику загалом як щось, "що має на меті тримати факти в стані оніміння, поки ми безпристрасно вивчаємо взаємозв'язок між ними" [10], що особливо стосується алгебри.

Одним з найбільших геометрів цієї епохи був А. Ф. Мебіус (1790-1868), людина, яка завдяки своєї скромності у науковій кар'єрі не мала особливого успіху: він був астрономом в німецькій обсерваторії другого рівня. Коли йому виповнилося 68 років, він подарував Паризькій академії свої мемуари про так звані «односторонні» поверхні, які містили деякі досить цікаві факти з нової галузі геометрії. Проте, як і багато інших досить ґрунтовних наукових праць, його робота пролежала на полицях в Академії декілька років, поки не з’явилися обставини, при яких автор сам опублікував цю роботу. Незалежно від Мебіуса подібні відкриття зробив астроном І. Лістинг (1808-1882) з Геттінгіна і, знаходячись під впливом Гауса, він у 1847 р. видав невеличку працю "Vorstudien zur Topologie". Коли Б. Рімани (1826-1866) приїхав до Геттінгена, щоб поступити до університету, математична атмосфера закладу цього міста вже була наповнена пильним інтересом до нових та старих геометричних ідей. Згодом він зрозумів, що саме в цих ідеях потрібно шукати підказку стосовно більш глибоких властивостей аналітичних функцій складеної змінної. Подальший розвиток топології, очевидно, зобов'язаний чимось більше, ніж виникненням рімановоі теорії функцій [13], в якій найбільш фундаментальними є саме топологічні поняття.

У деякому розумінні топологія – це наука, що вивчає неперервність: спочатку мова йде про неперервність простору або форм, а потім вона переходить до узагальнень, що згодом, по аналогії, ведуть до нового розуміння неперервності та "звичайного" простору, як ми його собі уявляємо. Справжні топологи не використовують жодних зображень, ставлячись до них з недовірою. Це пов’язано з тим, що неможливо та досить дивно намагатися зобразити «простори», які їх займають. Проте нам буде більш просто зрозуміти їх цілі, прийти до топологічної точки зору на конкретні форми (або "пробіли"), якщо розпочинати з того, що можна або побачити, або доторкнутися.

Топологів цікавлять «саме ті властивості «об’єктів» (досі інтерпретованих нами в геометричному сенсі), які є найбільш стійкими, тобто здатними протистояти деформаціям стиснення та натягу» [9].

На початку виникнення унікальність методів, що використовували в новій галузі, не дозволяла подати одержані результати в традиційній, дедуктивній формі, яка є характерною для елементарної геометрії. Оскільки, здійснюючи перші кроки у невідомому напрямку ідеальна бездоганна строгості зовсім не потрібна та не є досить важливою, ми іноді не поспішаємо звертатися напряму до інтуїції здобувачів середньої освіти.

Як ви гадаєте, з чого беруть початок великі відкриття? Зрозуміло, що з чогось цікавого, дивного та що поки що не має пояснення. А ще вони починаються з маленьких відкриттів, які здобувачі можуть робити щодня. Бо щось цікаве можна побачити кожного дня, потрібно лише вміти побачити та зрозуміло пояснити це здобувачам.

Пояснення не мають бути "дитячими", вони повинні бути саме науковими, бо дошкільнята та здобувачі молодших класів – це справжні дослідники, науковці-початківці.

Розглянемо питання, що ж таке лінія? Діти вже з першого класу мають певні уявлення і поняття про основні геометричні фігури такі, як точка, відрізок прямої, пряма лінія, ламана лінія, кут, многокутник, круг. При цьому система геометричних вправ та задач і методика роботи над завданнями геометричного змісту повинні «сприяти розвитку просторових уявлень у дітей, умінь спостерігати, порівнювати, абстрагувати й узагальнювати» [14]. Достатньо швидко розвивається лінія геометричних величин, їх вимірювань та обчислень.

Евклід, наприклад, визначає лінію як "довжину без ширини". Це, зрозуміло, не є означенням, а тільки наочним описом лінії. Наступний приклад показує, проте, що цей опис не можна вважати вдалим.

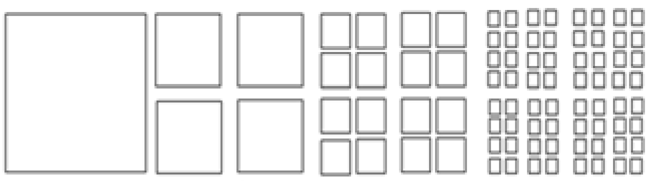


Рис. 3.1

Приклад 3.1. Візьмемо квадрат, що має площу 1 (рис. 3.1, а) та вилучимо з нього хрест (рис. 3.1, б), причому ширину смужок вилученого хреста підберемо таким чином, щоб площа хреста дорівнювала $\frac{1}{4}$. Далі в кожному з отриманих квадратів знову вилучимо по хресту (рис. 3.1, в), причому так, щоб сума площ цих вилучених хрестів дорівнювала $\frac{1}{8}$. В кожному з отриманих 16 маленьких квадратів знову вилучимо по хресту (рис. 3.1, г) таким чином, щоб сума площ кусочків, які видаляються, становила $\frac{1}{16}$, і т.д. Позначимо як A "граничну фігуру", тобто перетин $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$, де $A_n -$ фігура, яку можна отримати після виконання n етапів побудови. Фігура A "розсипається" на частинні точки (оскільки квадратики з кожним разом стають все меншими) і тим не менше площа – додатна. Дійсно, спочатку ми видалили з квадрату $\frac{1}{4}$ його площі, потім $\frac{1}{8}$, потім $\frac{1}{16}$ і т.д. На границі у нас залишається фігура A, яка має площу $1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots)$. Оскільки сума нескінченної спадної геометричної прогресії в дужках дорівнює $\frac{1}{2}$, то площа побудованої граничної фігури A буде дорівнювати $\frac{1}{2}$.

Тепер побудуємо деяку просту дугу (тобто фігуру, яка гомеоморфна відрізку), щоб вона проходила через усі точки множини A. Для цього візьмемо вигнуту смужку, яка складається з чотирьох квадратів, що ми отримали на першому етапі побудови (рис. 3.2, а). Потім зробимо смужку більш вузькою та зігнемо її, так що вона буде містити усі квадрати, які одержали на другому етапі (рис. 3.2, б), потім на третьому (рис. 3.2, в) і т.д.

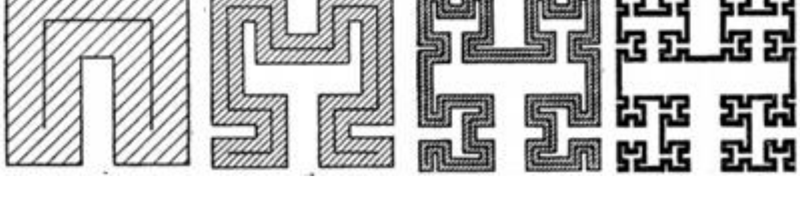


Рис. 3.2

Після n етапів такої побудови ми одержимо смужку B_n, що міститься в попередніх смужках та яка містить фігуру A_n (а тому і фігуру A). Перетин $B_1 \cap B_2 \cap \dots$ цих всіх смужок, тобто "граничну фігуру", позначимо через B; вона також містить A, а тому площа фігури B буде не меншою $\frac{1}{2}$. Рис. 3.2 наочно показує, що B є досить "звивистою" лінією (простою дугою). Лінія ця має додатну площу, тобто її навряд чи можна називати "довжиною без ширини".

Крім того, Евклід дає ще опис лінії як "межі поверхні". Проте і поняття "межа", як ми побачимо нижче на прикладі, містить у собі багато несподіваного. Ми звикли вважати, що до усіх ділянок площини лінії примикає "з двох боків". Так, якщо $l -$ проста замкнена лінія, то обидві області, U і V, які визначаються лінією l, дотикаються до неї на всьому проміжку (тобто як завгодно близько примикають до будь-якої точки $x \in l$, тому є і точки з області U, і точки з області V).

Здається досить очевидним та наочним, що лінія не може мати спільної межі більше, ніж з двома областями на площині, саме тими, що з'єднуються з цією лінією на всьому її проміжку.

Приклад 3.2. Цікавий приклад лінії був запропонований польським математиком Серпінським [24]. Поділимо квадрат на дев'ять маленьких квадратів та вилучимо середній з них (рис. 3.3, а). Кожен з решти восьми квадратів знову поділимо на дев'ять маленьких квадратиків та вилучимо середній квадрат (рис. 3.3, б). Потім аналогічно зробимо з кожним з решти квадратів (рис. 3.3, в) і т.д. Наприкінці ми отримаємо деяку одновимірну фігуру C, тобто лінію ("килим Серпінського").

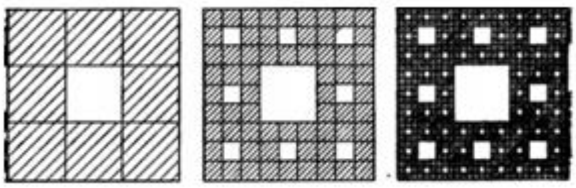


Рис. 3.3

Фігура C являє з себе універсальну плоску лінію: якщо лінія l міститься в площині, то вона міститься в килимі Серпінського, тобто існує така лінія $l` \subset C$, яка гомеоморфна l.

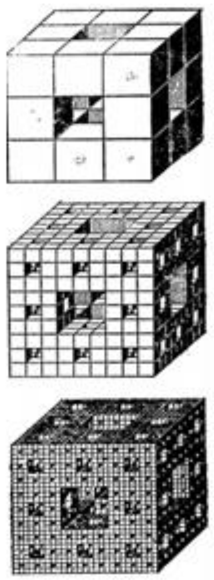


Рис. 3.4

Зрозуміло, що лінії, які не містяться в площині, не можуть бути розміщені і в килимі Серпінського, (рис 3.4), в який, як довів австрійський математик Менгер [19], можна вкласти будь-яку лінію.

Приклад 3.3. Нехай точка, яка рухається, пробігає фігуру форми літери Ф двома способами, як показано на рис.3.5 (суцільною лінією показано шлях, який пройдено точкою в певний момент, а пунктирною – подальший її рух). Але в обох випадках точка пробігає одну і ту саму множину, тобто вона залишає "слід" від руху однаковий, проте шляхи при цьому різні.

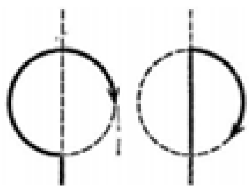


Рис. 3.5

Наведемо більш точне означення, що таке шлях. Нехай в площині деякої фігурі А рухається точка, яка розпочинає свій рух від моменту $t = 0$ до моменту $t = 1$. Для кожного моменту t, де $0 \leq t \leq 1$, відоме положення $a(t)$ точки, що рухається, таким чином, кожній точці t відрізку $[0,1]$ ставиться у відповідність точка $a(t) \in A$. Отже, маємо відображення відрізка $[0,1]$ в фігуру A, причому це відображення неперервне, оскільки точка A "неперервно" рухається зі змінною t. Це відображення і є шляхом. Ми прийшли до наступного означення: будь-яке неперервне відображення відрізка $[0,1]$ в фігуру A називається шляхом (шляхом саме в цій фігурі).

Тоді будь-яку просту дугу можна розуміти як шлях (оскільки проста дуга одержується за допомогою гомеоморфного відображення відрізка, а гомеоморфні відображення неперервні). Зокрема, лінію, яку було наведено в прикладі 3.1, можна розглядати як "слід рухомої точки". Це свідчить про те, що поняття шляху не є занадто простим. Наступний приклад ще більш підтверджує це твердження.

Приклад 3.4. Покажемо, що можна побудувати шлях, що буде проходити через кожну точку квадрата. Інакше кажучи, існує неперервне відображення відрізка на весь квадрат; такі шляхи мають назву кривих Пеано [7]. Для отримання кривої Пеано побудуємо в квадраті Q досить звиваючі "смужки-лабіринти": поділимо квадрат на $4, 16, 64, \dots, 4^n, \dots$ рівних між собою квадратиків (рис. 3.6), а потім вилучимо деякі з їх сторін (рис.3.7) , причому стінки, які залишаються на якомусь етапі побудови, будуть зберігатися і на всіх наступних етапах.

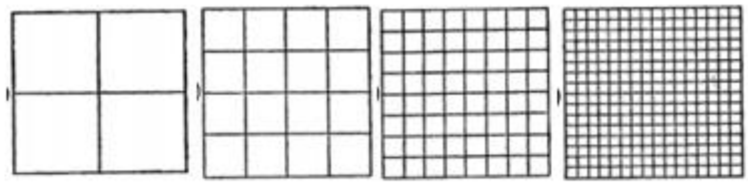


Рис. 3.6

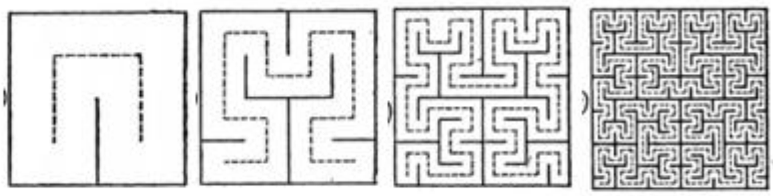


Рис. 3.7

Середні лінії отриманих смужок (пунктирна лінія на рис. 3.7) і дадуть на границі шлях, яким можна заповнити весь квадрат Q, тобто криву Пеано. Цей шлях більш точно можна побудувати наступним способом.

Розглянемо неперервне відображення відрізка $[0,1]$ на першу пунктирну ламану лінію (рис. 3.7, а), при якій відрізок $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ буде відображатися на ту частину цієї ламаної, яка розташована в лівій нижній чверті вихідного квадрата, відрізок $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ – на частину, яка розташована в лівому верхньому квадраті, а відрізки $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ та $[\frac{3}{4},1]$ – на частини, що лежать в правих (верхньому та нижньому) квадратах. Це відображення позначимо через $f_1(t)$ (де $0 \leq t \leq 1$). Далі, через $f_2(t)$ позначимо відображення відрізка $[0,1]$ на другу пунктирну ламану (рис. 3.7, б), при якому відрізки $\left[0,\frac{1}{16}\right],\left[\frac{1}{16},\frac{2}{16}\right],\dots,\left[\frac{15}{16},1\right]$ будуть відображатися на послідовні частини цієї ламаної, які розташовані в шістнадцяти квадратах другого етапу. Аналогічно, $f_3(t)$ являє з себе відображення відрізка $[0,1]$ на пунктирну ламану третього етапу (рис. 3.7, в) і т.д. Границя послідовності розглянутих функцій $f_1(t), f_2(t), f_3(t),\dots$ є відображенням $f_1[0,1] \to Q$, тобто деякий шлях в межах квадрату Q: це і є крива Пеано.

Легко пояснити, що ця границя існує. Візьмемо, наприклад, точку $\frac{1}{3} \in [0,1]$. Оскільки $\frac{1}{3}$ лежить у другій чверті відрізка $[0,1]$, тобто $\frac{1}{3} \in \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, то точка $f_1\left(\frac{1}{3}\right)$ розташована в лівому верхньому квадраті на (рис 3.6, а). Далі, так як $\frac{1}{3} \in \left[\frac{5}{16},\frac{6}{16}\right]$, то $f_2\left(\frac{1}{3}\right)$ лежить в шостому по порядку квадраті, який штрихована ламана пробігає (рис. 3.7, б) (тобто в лівому верхньому квадраті на рис. 3.6, б. Так як $\frac{1}{3} \in \left[\frac{21}{64},\frac{22}{64}\right]$, то $f_3\left(\frac{1}{3}\right)$

лежить в 22-му квадраті, який пробігає штрихована ламана (рис. 3.6, в) (тобто в лівому верхньому квадраті на рис. 3.6, в), і т.д.

Границею цієї послідовності квадратів, що поступово зменшуються (або вкладені послідовно один в інший), тобто, в даному випадку, ліва верхня вершина квадрата і є точка $f\left(\frac{1}{3}\right)$. Аналогічно визначається точка $f(t)$ для будь-якого $t \in [0,1]$.

Слід відмітити, що крива Пеано не є простою дугою, вона має нескінченно багато точок "склеювання" (тобто в квадраті існує нескінченно багато точок, через які точка проходить шлях $f(t)$ більше, ніж один раз).

Наступній приклад можна розглядати на занятті математичного гуртка в 9 класі з метою розширення знань з математики та розвитку мислення. При цьому залучення здобувачів середньої освіти до спільної роботи краще здійснювати під час уроку. Здобувачам можна запропонувати цікаву задачу та запропонувати продовжити цю роботу вже на засіданнях гуртка. Таким способом ми можемо підготувати здобувачів середньої освіти до вивчення нового розділу геометрії «Стереометрії».

Курс стереометрії вивчається в 10-11 класах. В цьому курсі розглядаються наступні питання: властивості фігур у просторі (паралельність та перпендикулярність прямих і площин, многогранники та тіла обертання). Геометричні побудови містять як безпосередні, так і уявні побудови, що застосовуються під час зображення просторових геометричних фігур, а також побудови тіл обертання та перерізів многогранників [19].

Приклад 3.5. Цікавий приклад поверхні було запропоновано у працях німецьких математиків Мебіуса і Лістинг [11]. Наведемо цей приклад: стрічка прямокутної форми (рис. 3.8, а) один раз перекручується, (рис. 3.8, б, в) а потім її кінці склеюються. Одержана поверхня (рис. 3.8, г) називається *стрічкою Мебіуса*, ця поверхня має лише одну сторону. Так, якщо ми будемо пересувати пензлик по стрічці Мебіуса (рис. 3.9), ми прийдемо до того самого місця, з якого розпочалося зафарбовування, проте з іншого боку. Переміщуючи пензлик далі, ми замалюємо усю стрічку Мебіуса та пересвідчимося, що в неї лише одна сторона.

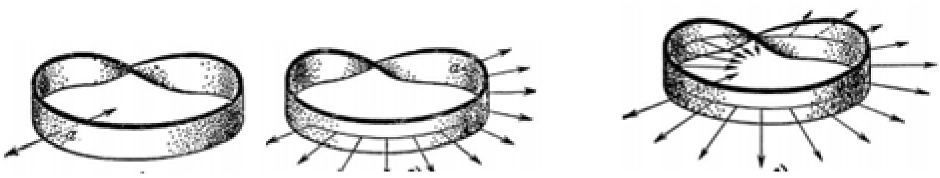


Рис. 3.8

Рис. 3.9

Зрозуміло, що такий наочний опис односторонньої поверхні за допомогою "зафарбовування" можливий лише для "товстої поверхні", яка виготовлена з певного матеріалу; проте математично ця поверхня не має товщини. Тому розглянемо інший опис факту "однобічності" для цієї поверхні. В кожній точці a стрічки Мебіуса можна побудувати два протилежні вектори, які проводимо перпендикулярно до поверхні в цій точці (рис. 3.9, а). Ці вектори називають *нормалями* до стрічки Мебіуса в точці a. Візьмемо одну з двох нормалей та розпочнемо рухати точку a разом з нормаллю по стрічці Мебіуса (рис. 3.9, б). Коли точка a обійде всю стрічку Мебіуса, то нормаль, яка переміщувалася, займе не своє початкове положення, а протилежне (рис. 3.9, в). Таким чином, на стрічці Мебіуса існує такий собі замкнений шлях (обхід): при переміщенні по цьому шляху нормаль до поверхні наприкінці прийде в положення, протилежне вихідному. Поверхні, що володіють такими підходами, і називаються *односторонніми*.

Але ми розглядаємо не лише саму поверхню, а й її розташування в просторі. Тому наведемо так зване "внутрішнє" визначення для односторонніх поверхонь. Навколо точки a, з якої виходить нормаль, опишемо невелике коло і на ньому позначимо стрілкою напрямок проти годинникової стрілки (рис. 3.9, а). Якщо точка a переміщується, то разом з нею змінює положення і нормаль, а також коло з визначеним на ньому напрямком. Коли ми розпочнемо обводити коло по всій стрічці Мебіуса, то напрямок на колі зміниться на протилежний (оскільки нормаль змінює свій напрямок, (рис. 3.9, б).

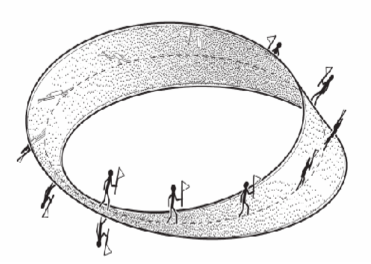
Таким чином, на стрічці Мебіуса існує певний замкнений шлях, що при русі кола впродовж всього цього шляху напрямок буде змінюватися на протилежний. Такі підходи називають такими, що змінюють орієнтацію.

Якщо на поверхні відсутні обходи, що змінюють орієнтацію, то така поверхня називається *орієнтованою* (або двосторонньою). Якщо говорити наочно, то орієнтовність можна визначити наступним чином: «всю поверхню можна покрити маленькими колами та обрати на них такі напрямки, які будуть орієнтовані однаково» [1].

Нехай тепер Q_1 і $Q_2 -$ дві поверхні, кожна з яких має межу, що гомеоморфна колу. З’єднавши ("склеївши") границі цих поверхонь, ми отримаємо спільну нову поверхню. В цьому випадку кажуть, що діра, яка є на поверхні Q_1, заклеюється поверхнею Q_2 (або навпаки).

Розглянемо ще лист Мебіуса з “дитячої” точки зору. З самого дитинства ми звикли вважати, що усі поверхні мають дві сторони. У кожного звичайного листка з дерева одна сторона може бути темно-зеленого кольору, а інша – світло-зеленого. В підручнику на одній стороні аркуша може бути текст, а на іншій – малюнок. Якщо одну із сторін аркуша звичайного паперу ми зафарбуємо жовтим кольором, то друга його сторона буде незмінною, при цьому ми зможемо розфарбувати її будь-яким іншим кольором.

Візьмемо довгу смужку з паперу та склеїмо її у кільце. Одну із сторін кільця, наприклад, ми можемо розмалювати зеленим кольором, а іншу – фіолетовим. Якщо миша буде бігати по зеленій стороні кільця, то для того, щоб їй опинитися на фіолетовій, доведеться перелізти через край кільця.



Це кільце – лист Мебіуса, воно має лише одну сторону та лише один край. Спробуємо розфарбувати по аналогії з кільцем. Але нічого не виходить: лист Мебіуса можна розфарбувати лише за допомогою одного кольору, тому вчені кажуть, що лист Мебіуса має лише одну сторону [22]. А перейти з однієї точки поверхні листа на іншу можна, навіть не перетинаючи краю.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено аналіз наукової літератури з дослідження поведінки функторів; вивчено поведінку та властивості функторів на паракомпактних просторах; розглянуто питання можливості ознайомлення здобувачів середньої освіти з найпростішими прикладами просторів, що виникають під дією коваріантних функторів експоненціального типу.

Проведене дослідження характеру поведінки функторів на категорії компактів та неперервних відображень переконливо свідчить, що функтором експоненти exp_2 від кола – це лист Мебіуса.

Проведене дослідження дозволяє охарактеризувати наступні висновки:

1) з аналізу наукової літератури з проблеми дослідження можна визначити, що більш просто підмітити існування топологічних властивостей фігур, аніж створити спосіб їх “обчислення;

2) існують різні умови метризуємості паракомпактних топологічних просторів, які можуть бути визначені за допомогою поведінки функторів експоненціального типу на цих просторах;

3) дослідження показало, що існує можливість наочно ознайомити здобувачів середньої освіти з прикладами просторів, які виникають під дією коваріантних функторів експоненціального типу. На факультативних заняттях з математики ми можемо дати поняття топологічних просторів і показати, що воно є не тільки гарним інструментом для конструювання нових топологічних об'єктів, але й надає цікаві методи дослідження топологічних просторів та їх неперервних відображень.

Найбільш ефективним способом навчання математики в школі є введення позакласних уроків з метою сприяння розвитку здобувачів середньої освіти, оскільки вони будуть дуже зацікавленими в проведенні певних досліджень, тому що вони зможуть проводити їх власноруч, а не просто спостерігати за тим, як працює вчитель. Аналізуючи результати виконаної самостійної роботи здобувачів, можна зробити гарні висновки стосовно того, що сучасна топологія має достатньо велике практичне значення. Розвиток топології відбувається в різних напрямках, при цьому сфера застосування топології досить стрімко розширюється.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александрян Г.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. – М.: Высш. шк. 1979. – 396 с.
2. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 160с.
3. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія / О.А.Борисенко. – Х.: Основа, 1995.-303 с.
4. Евклідова геометрія URL: https://wm-help.net/lib/b/book/2297999939/45
5. Елементи загальної топології / О.Р. Никифорчин. – Івано-Франківськ: Прикарпатський університет, 2015. – 240 с.
6. Загадковий лист Мебіуса URL: https://informaciaforall.blogspot.com/2014/07/blog-post_28.html?fbclid=IwAR3Urg4tJc6PWYCNiHMsUPri3ANwQyECq53h7p0gRv3ayuUMF37YSK0dF5k
7. Заричний М.М. Топологія функторів и монад у категорії компактів / М.М. Зарічний. – К.: ИСДО, 1993. – 108 с.
8. Мерзляк А.Г. Геометрія: підр. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2016. – 208 с.
9. Мерзляк А.Г. Геометрія: підр. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С.Якір. – Х.: Гімназія, 2009. – 270 с.
10. Мерзляк А.Г. Геометрія: проф. рівень : підр. Для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін.. – Х.: Гімназія, 2019. – 204 с.
11. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. – М.: МГУ. 1980. – 439с.

12. Наглядная топология / В. Г. Болтянский, В.А. Ефремович – М.: Книга по Требованию, 2012. – 160 с.
13. Наглядная топология [Електронний ресурс] / В. В. Прасолов. – М.: Изд-во МЦНМО, 1995. – 111 с.
14. Навчальні програми для 5-9 класів URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas
15. Пасынков Б.А., Федорчук В.В. Топология размерности. – М.: Знание, 1984. – 64 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика"; №9).
16. Прасолов В. В. Наглядная топология / Независимый Моск. ун-т. – 3-е изд., стер. – М.: МЦНМО, 2012. – 112 с.
17. Програми з математики URL: http://www.olenabakal.ml/p/blog-page_63.html
18. Размерность Хаусдорфа URL:
19. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. Спеціальностей пед.. вузів. – К., 2000. – 512 с.
20. Сулліван Д. Геометрична топологія. – М.: Світ, 1975. – 284 с.
21. Топология URL: https://indicator.ru/label/topologiya
22. Федорчук В.В. Общая топология. Основные структуры / В.В. Федорчук, В.В. Филиппов. – М.: Из-во МГУ, 1998. – 252 с.
23. Федорчук В.В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q – многообразия // УМН. – 1981. – Т. 36, вып. 3. – С. 177 – 195.
24. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Топология гиперпространств и ее приложения. – М.: Знание, 1989. – 48 с. – (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, кибернетика"; №4)
25. Что такое линия? Кривая Пеано URL: http://stratum.ac.ru/education/textbooks/kgrafic/additional/addit32.html

26. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов / Е.В.Щепин.-УМН, – 1981.- Т.36.- №3.-С.3-62.
27. Шапиро Л.Б. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа. – В кн.: IV Тираспольский симпозіум по общей топологи и ее приложеним, Кишинев, “Штиинца”, 1979, с. 163-164
28. Энгелькинг Р. Общая топология . -., “Мир”, 1986.
29. Элементы топологии на уроках математики в школе URL: https://works.doklad.ru/view/IB9S-vx4Qz8.html