МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Кваліфікаційна робота (проєкт)
на здобуття ступеня вищої освіти "бакалавр"

Виконав: студентка 421 групи
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної (наукової) програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 Середня освіта (математика) галузі знань 01 Освіта / Педагогіка
кваліфікація: вчитель математики
Голофєєва Д.

Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко О.Г.

Рецензент докторка педагогічних наук,
професорка Літвінова М.Б.

Херсон – 2022

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. АЛГЕБРАЇЧНЕ РОЗШИРЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОЛІВ

1.1. Поле дійсних чисел ………………………………………….. 6

1.2. Поле комплексних чисел ……………………………………. 11

1.3. Скінченні розширення числових полів …………………… 14

РОЗДІЛ 2. ЧОТИРИВИМІРНІ ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

2.1. Тіло кватерніонів та його властивості 20

2.2. Характеристика тіла кватерніонів та теорема Фробеніуса ... 27

ВИСНОВКИ 34

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 36

ВСТУП

Актуальність дослідження. Математика, як відомо, вивчає кількісні відношення і просторові форми реального світу. Основним знаряддям вивчення кількісних відношень є число. Поняття числа, таким чином, було і є одним з основних, найбільш важливих математичних понять. Без поняття числа неможлива математична наука. Більш того, не можна уявити собі свідоме життя людини, яка не має ніяких числових понять. Поняття числа пройшло довгий і складний шлях історичного розвитку – від уявлень про числа “один”, “два”, “три” до поняття комплексного числа. Не спиняючись тут на питаннях виникнення і розвитку поняття числа і вчення про число, зауважимо лише, що, виходячи з поняття множини, можна побудувати теорію натуральних чисел, а далі теорію цілих, раціональних, дійних і теорію комплексних чисел, причому кожну з цих теорій можна побудувати або конструктивно, або аксіоматично. При конструктивній побудові цих теорій нова числова система визначається через попередню, яка вважається вихідною, тобто “будівельним матеріалом” для конструювання нових чисел: поняття натурального числа визначається через поняття множини, цілі числа визначаються через натуральні, раціональні – через цілі і т.д. При аксіоматичній побудові основні властивості кожної числової системи (системи натуральних чисел, цілих чисел, раціональних чисел і т.д.) задаються системою аксіом. Свій внесок до розвитку загальної теорії чисел внесли такі видатні вчені свого часу, як Евклід [2], Діофант, Ферма [15], Ейлер, Діріхле [12] та інші.

Розвиток теорії алгебр характеризується систематичним вивченням алгебр скінченого рангу над деяким полем K. Одним з питань цієї теорії є побудова тіла кватерніонів, які в свій час винайшов Гамільтон [2]. Завдяки властивості операції множення кватерніонів, що охоплює як скалярний, так і векторний добуток тривимірних векторів, ці елементи широко застосовуються в геометрії, кінематиці та у механіці.

Як показав Гамільтон у 1850 році, якщо відмовитися від комутативності множення, то можна побудувати в векторному просторі розмірності 4 над полем дійсних чисел систему, яка схожа на систему поля комплексних чисел, запропоновану Гауссом [5].

Виникає питання про те, чи існують поряд з комплексними числами й кватерніонами ще й інші алгебри скінченого рангу над полем дійсних чисел, що мають ділення? Відповідь виявляється негативною. І хоча в класі неасоціативних алгебр відомі ще алгебри розмірності 8 над R – октави Келі, а також ряд алгебр, що утворюються з комплексних чисел й кватерніонів деяким «спотворенням» множення [8], проте це питання для неасоціативних алгебр вирішено ще не повністю.

Мета дослідження – дати опис структури множини представників гіперкомплексних чисел – тіла кватерніонів.

Предметом дослідження є поле комплексних чисел, а *об‘єктом* дослідження – безпосередньо тіло кватерніонів.

Основні *методи дослідження*, що використовуються у роботі, – це метод зображення скінчених груп, метод трансцендентних групових підстановок, метод факторизації.

Виходячи з мети, визначені *завдання* роботи:

- розглянути основні теоретичні відомості з теорії числових полів (поле дійсних чисел, поле комплексних чисел), а також скінчені розширення числових полів;
- розглянути основні властивості тіла кватерніонів;
- визначити умови, при яких існує комутативна (або асоціативна) алгебра скінченого рангу над полем дійсних чисел.

Теоретичне значення роботи полягає у тому, що було дано опис класу гіперкомплексних чисел за допомогою апарату теорії груп. *Практичне значення* дипломної роботи полягає в можливості застосування матеріалу студентами та викладачами закладів вищої освіти.

Дослідження виконувалось у межах теми науково-дослідної роботи «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Робота складається з двох основних розділів. Перший розділ містить деякі теоретичні відомості з теорії числових полів, зокрема, поля комплексних чисел. Другий розділ теоретичні відомості, пов‘язані з побудовою тіла кватерніонів та його характеристикою. Крім того, в розділі розглянуто питання про існування альтернативних лінійних алгебр скінченого рангу над полем дійсних чисел. Відповідь на це питання сформульована в основній теоремі роботи – теоремі Фробеніуса.

РОЗДІЛ 1
АЛГЕБРАЇЧНЕ РОЗШИРЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОЛІВ

1.1. Поле дійсних чисел

Уже в шкільному курсі алгебри кілька разів відбувалося розширення запасу чисел. Арифметика оперує додатними цілими і дробовими числами. Шкільний курс алгебри починається по суті з введення цілих від'ємних чисел, тобто з розширення множини натуральних чисел N до кільця цілих чисел Z. Провадилося де розширення для того, щоб дістати числову систему, в якій рівняння $a + x = b$ завжди мало б розв'язок. Потім кільце Z розширювалося до поля раціональних чисел Q, щоб дістати числову систему, в якій би завжди розв'язувалося рівняння $ax = b$ (звичайно при умові $a \neq 0$).

Покладемо в основу значення поля дійсних чисел вимогу існування у полі точної верхньої межі для будь-якої обмеженої зверху множини його елементів [11]. Ми не будемо означати окремо поняття дійсного числа, а означимо зразу поле всіх дійсних чисел.

Полем дійсних чисел називається будь-яке упорядковане поле, в якому кожна обмежена зверху множина його елементів має точну верхню межу. Позначатимемо поле дійсних чисел символом R. Елементи поля R називаються *дійсними* числами.

У розгорнутому вигляді це означення формулюється так: полем дійсних чисел називається будь-яка множина, що містить принаймні два різні елементи, в якій $R = \{a,\ b,\ c\ldots\}$ визначені дві унітарні операції – додавання і множення, й введено відношення $a < b$ («а менше від b»), причому виконуються такі умови (аксіоми):

Аксіоми поля

1. $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\left[\left(a+b\right)+c=a+\left(b+c\right)\right]$ (асоціативність додавання)

2. $\underset{a,b,\in R}{\forall}\left[a+b=b+a\right]$ (комутативність додавання)

3. $\underset{a,b\in R}{\forall}\ \underset{c\in R}{\exists}\left[b+c=a\right]$ (здійсненність операції віднімання)

4. $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\left[(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\right]$ (асоціативність множення)

5. $\underset{a,b,\in R}{\forall}\left[a\cdot b=b\cdot a\right]$ (комутативність множення)

6. $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\left[(a+b)\cdot c=ac+bc\right]$ (дистрибутивність множення відносно додавання)

7. $\underset{a,b\in R,r\in R}{\forall\ \exists}\left[br=a\right]$ (операції ділення, крім ділення на нуль)

Аксіоми упорядкованості поля:

8. Для будь-яких елементів a і b множини R справедливе одне і тільки одне із співвідношень $a = b$, $a < b$, $a > b$.

9. $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\left[a<b\wedge b<c\Rightarrow a<c\right]$ (транзитивність відношення $a < b$)

10. $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\left[a<b\Rightarrow a+c<b+c\right]$ (монотонність додавання)

11. $\underset{a,b,c\in R}{\forall}\left[a<b\wedge c>\theta\Rightarrow ac<bc\right]$ (монотонність множення).

Аксіома точної верхньої межі:

12. Кожна обмежена зверху множина $A\subset R$ має в R точну верхню межу.

Вимоги, про які йдеться в наведеному вище означенні, називають аксіомами поля дійсних чисел.

Наслідки з аксіом поля й упорядкованості поля:

У полі дійсних чисел, як і в усякому полі, сума і добуток кількох його елементів (дійсних чисел) не залежать від способу розстановки дужок і порядку відповідно доданків і множників, справедливі звичайні правила множення і розкриття дужок, існують нульовий і одиничний елементи 0 і є (які називають також нулем і одиницею, відповідно), для кожного числа а існує протилежне число - a, немає дільників нуля [9].

Перш ніж розглянути наслідки, що випливають а аксіом упорядкованості поля, вводьмо поняття додатного й від'ємного дійсного числа і доведемо теорему, на яку далі нам доведеться посилатися;

Дійсне число a називають додатним, якщо воно більше від нуля, його називають від'ємним, якщо воно менше від нуля.

Якщо дійсне число a додатне, то протилежне йому число - a - від'ємне, бо з $\theta < a$ за аксіомою 10 поля дійсних чисел випливає, що $\theta + (-a) < a + (-a)$, тобто $-a < \theta$.

Теорема 1.1. Дійсне число a тоді і тільки тоді більше від дійсного числа b, коли $a - b$ додатне число, тобто коли $a - b > \theta$.

Тепер перейдемо до доведення теорем, які випливають з аксіом упорядкованості поля.

Теорема 1.2. У полі дійсних чисел R із співвідношень $a < b$, $a = b$, $a > b$ випливають відповідно співвідношення

$$a + c < b + c, \quad a + c = b + c, \; a + c > b + c.$$

Теорема 1.3. У полі дійсних чисел R із співвідношень $a < b$, $a = b$, $a > b$ випливають відповідно співвідношення, $ac < bc$, $ac = bc$, $ac > bc$, якщо $c > 0$ і співвідношення $ac > bc$, $ac = bc$, $ac < bc$, якщо $c < \theta$.

Теорема 1.4. Для будь-яких дійсних чисел a, b і c із співвідношень $ac < bc$, $ac = bc$, $ac > bc$ випливають відповідно співвідношення, $a < b$, $a = b$, $a > b$, якщо $c > \theta$ і співвідношення $a > b$, $a = b$, $a < b$, якщо $c < \theta$.

Теорема 1.5. Для будь-яких дійсних чисел a, b, c, d із співвідношень $a < b$, $c < d$ випливає співвідношення $a + c < b + d$.

Теорема 1.6. Для будь-яких додатних дійсних чисел a, b, c, d із співвідношень $a < b$, $c < d$ випливає співвідношення $ac < bd$. Справді, за аксіомою 11 $ac < bc$, $bc < bd$ і, отже, за аксіомою 9 $ac < bd$.

Теорема 1.8. Сума квадратів скінченого числа дійсних чисел, принаймні одне з яких відмінне від нуля, більша від нуля. Справді, якщо дійсне число $a=\theta$, то й $a^2=\theta$. Якщо ж $a\neq\theta$, то або $a>\theta$, або $-a>\theta$. Оскільки $a^2=a\cdot a=(-a)\cdot(-a)$, то в обох випадках $a^2>\theta$.

Таким чином, якщо принаймні одне з дійсних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ відмінне від нуля, то. в сумі квадратів кожен з доданків або дорівнює нулю, або більший від нуля, але принаймні один з них більший від нуля. Отже $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>\theta$.

Наслідок. Одиничний елемент e поля дійсних чисел R більший від нульового елемента 0.

Справді, $e=e^2=\theta$.

Теорема 1.9. Поле дійсних чисел R є поле характеристики нуль.

Нехай a – будь-яке дійсне число.

Модулем, або абсолютною величиною числа a, називають невід‘ємне з чисел a і $-a$. Інакше кажучи, модуль числа $a\geq 0$ – це саме число a, модуль числа $a<0$ – це протилежне число $-a$.

Модуль числа а позначають символом $|a|$. Згідно з означенням 2, завжди $|a|=|-a|$, $|a|\geq\theta$, $|a|\geq a$, $|a|\geq -a$.

Теорема 1.10. Для будь-яких дійсних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ здійснюється співвідношення: $|a_1+a_2+\cdots+a_n|<|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

Теорема 1.11. Для будь-яких дійсних чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ здійснюється співвідношення: $|a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot\cdots\cdot|a_n|$

Теорема 1.12. У полі дійсних чисел R міститься підполе, ізоморфне, полю раціональних чисел Q відносно операцій додавання і множення та відношення порядку.

Наслідки з аксіоми точної верхньої межі.

З аксіоми точної верхньої межі випливає справедливість теореми, яка дістала назву «принцип Архімеда» [7].

Принцип Архімеда. Для будь-яких дійсних чисел a і b, де $a>0$, існує таке натуральне число n, що $na>b$.

Зокрема, якщо $a = 1$, дістаємо: для будь-якого $b \in R$ існує таке натуральне число n, що $n > b$. Упорядковане поле, в якому здійснюється принцип Архімеда, *називають архімедівськи упорядкованим*. Поле дійсних чисел R є архімедівськи упорядкованим.

З теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. Для будь-яких дійсних чисел $a > 0$ і $b > 0$ існує таке натуральне число n, що $\frac{b}{n} < a$.

Нехай a і b довільні числа, причому $a < b$. Сукупність всіх дійсних чисел x, які задовольняють нерівності $a \leq x \leq b$, називають *відрізком* або *сегментом* і позначають символом $[a,b]$. Числа a *і* b називають відповідно *лівим* і правим кінцями сегмента.

Сукупність всіх дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a < x < b$, називають *інтервалом* з лівим кінцем a і правим кінцем b і позначають символом (a, b).

Сукупність дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a < x \leq b$ і $a \leq x < b$, називають *півінтервалами* або півсегментами і позначають відповідно символами $(a,b]$ і $[a,b)$. Відрізки, інтервали і півінтервали називають *проміжками*.

Теорема 1.13. Кожен інтервал (a, b) містить раціональне число.

Коренем n-го степеня з дійсного числа a (n – будь-яке натуральне число) називають дійсне число b таке, що $b^n = a$. Корінь n-го степеня з числа a позначають символом $\sqrt[n]{a}$. Отже, якщо $b^n = a$ то $b = \sqrt[n]{a}$.

Теорема 1.14. Для будь-якого дійсного числа $a > 0$ і будь-якого натурального числа n існує одне і тільки одне дійсне число $b > 0$ таке, що $b^n = a$, тобто $\sqrt[n]{a}$ має одне і тільки одне додатне значення b.

Теорема 1.15. Яке б не було дійсне число $b > 0$ точна нижня межа множини $b, \frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \ldots, \frac{b}{n}, \ldots$ дорівнює нулю.

*Теорем*а 1.16. Яке б не було дійсне число a, завжди знайдеться таке ціле число m і притому тільки одне, що виконуватимуться нерівності $m \le a < m+1$.

Теорема 1.17. Кожне дійсне число a можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу, який не має дев'ятки в періоді.

Справедлива також обернена теорема.

Теорема 1.18. Кожен нескінченний десятковий дріб, який не мав дев'ятки в періоді, є записом деякого дійсного числа a.

1.2. Поле комплексних чисел

Дійсні числа мають величезне значення для математики і природознавства, зокрема для вимірювання довжин, площ, об'ємів, для вивчення рухів матеріальних тіл тощо. Проте є задачі, для розв'язання яких дійсних чисел не досить. Найпростішою з таких задач є задача розв'язування квадратного рівняння $x^2+1=0$. У полі дійсних чисел це рівняння не розв'язується, оскільки немає дійсного числа, квадрат якого дорівнював би -1 [21].

Поставимо перед собою завдання розширити поле, дійсних чисел R до такого поля, в якому рівняння $x^2+1=0$ вже мало б розв'язок. Потрібне нам розширення поля R будуватимемо з упорядкованих v пар дійсних чисел.

Нехай C – множина всіх можливих упорядкованих пар $\langle a,b\rangle$ дійсних чисел a і b. Вважатимемо, що пара $\langle a,b\rangle$ дорівнює парі $\langle c,d\rangle$ тоді і тільки тоді, коли $a = c$ та $b = d$. З означення рівності пар і властивостей рівності дійсних чисел, випливає, що відношення рівності пар має властивості рефлексивності, симетричності, транзитивності, тобто

Сумою пар $\langle a,b\rangle$ і $\langle c,d\rangle$ називатимемо пару $\langle a+c,b+d\rangle$ тобто

$$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle \underset{df}{=} \langle a+c, b+d\rangle \tag{1.1}$$

Добутком пар $\langle a,b\rangle$ і $\langle c,d\rangle$ називатимемо пару $\langle ac-bd, ad+bc\rangle$, тобто

$$\langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle \underset{df}{=} \langle ac-bd, ad+bc\rangle \tag{1.2}$$

Цим самим ми визначаємо в множині *C* всіх пар (*a, b*) дійсних чисел дві алгебраїчні операції: додавання і множення.

Теорема 1.19. Множина *C* з визначеними в ній операціями додавання і множення є поле.

Одиницею поля *C* є пара $\langle 1,0\rangle$, бо $\underset{\langle a,b\rangle\in C}{\forall}\left[\langle a,b\rangle\cdot\langle 1,0\rangle = \langle a,b\rangle\right]$. Протилежною для пари $\langle a,b\rangle$ є пара $-\langle a,b\rangle = \langle -a,-b\rangle$. Якщо $\langle a,b\rangle = \langle 1,0\rangle$, дістанемо, що для відмінної від нуля пари {*c, d*) оберненою буде пара $\left\langle \dfrac{c}{c^2+d^2}, \dfrac{-d}{c^2+d^2}\right\rangle$.

Покажемо тепер, що поле *C* є розширенням поля дійсних чисел *R*. Для цього доведемо таку теорему.

Теорема 1.20. У полі *C* міститься підполе *R′,* ізоморфне поле дійсних чисел *R* відносно операцій додавання і множення, визначених у підполі *R′* полі *R*.

Доведення.

Нехай *R′* – множина всіх пар виду $\langle a,0\rangle$, де *a* – будь-яке дійсне число. Очевидно, що $R' \subset C$. Кожному дійсному числу *a* поставимо у відповідність пару $\langle a,0\rangle$ множини *R′*. Цим, очевидно, буде задано взаємно однозначне відображення поля дійсних, чисел *R* на множину *R*.

Доведемо тепер, що ця відповідність є ізоморфною. Для цього покажемо, що сумі і добутку будь-яких дійсних чисел *a* і *b* відповідають сума і добуток пар $\langle a,0\rangle$ і $\langle b,0\rangle$, поставлених у відповідність цим числам. Це справді так. Дійсному числу $a + b$ в множині R' відповідає пара $\langle a+b,0\rangle$, а числу $a \cdot b$ – пара $\langle ab,0\rangle$. Але за формулами (1.1) і (1.2)

$$\langle a+b,0\rangle = \langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle,\ \langle ab,0\rangle = \langle a,0\rangle \cdot \langle b,0\rangle.$$

Отже, $a + b \rightarrow \langle a,0\rangle + \langle b,0\rangle$, $ab \rightarrow \langle a,0\rangle \cdot \langle b,0\rangle$. Таким чином, $R \subset R'$. Тому за теоремою 4, множина R' також є поле відносно операцій додавання і множення, визначених, у полі C, і, отже, є підполем поля C. Теорему доведено.

Нашим завданням було побудувати таке розширення поля дійсних чисел R, яке містить, розв'язок рівняння $x^2 + 1 = 0$. Побудоване нами поле C має цю властивість: одним з коренів заданого рівняння є елемент $\langle 0,1\rangle$ поля C. Елемент $\langle 0,-1\rangle$, очевидно, є другим коренем рівняння. $x^2 + 1 = 0$. Умовимося елемент $\langle 0,1\rangle$ позначати символом i, тоді елемент $\langle 0,-1\rangle = -\langle 0,1\rangle$ позначатиметься символом $-i$. Отже, $i^2 = (-i)^2 = -1$. Оскільки, за прийнятим вище, $\langle b,0\rangle = b$ і $\langle 0,1\rangle = i$, то $\langle 0,b\rangle = \langle b,0\rangle \cdot \langle 0,1\rangle = b \cdot i$ і тому $\langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle 0,b\rangle = a + bi$.

Отже, побудоване нами поле C є розширенням поля дійсних чисел, що містить елемент i, квадрат якого дорівнює -1; воно складається з усіх елементів виду $a + bi$, де a і b − будь-які дійсні числа. Розглянемо ще одну теорему, яка характеризує поле С.

Теорема 1.21. Поле C є мінімальним розширенням поля дійсних чисел R, що містить елемент, квадрат-якого дорівнює −1.

Теорема 1.22. Кожне мінімальне розширення поля дійсних чисел R, що містить елемент, квадрат якого дорівнює −1, ізоморфне полю C.

Будь-яке мінімальне розширення поля дійсних чисел R, що містить елемент i, квадрат якого дорівнює −1, називають *полем комплексних чисел*.

1.3. Скінченні розширення числових полів

Число називається *алгебраїчним*, якщо воно є коренем деякого многочлена з раціональними коефіцієнтами.

Існує безліч ірраціональних чисел, які не є коренями жодного многочлена над полем Q [10]. Такі числа називаються *трансцендентними*.

Число *a* називається *алгебраїчним відносно числового поля* Δ, якщо воно є коренем деякого многочлена над полем Δ. Число, яке не є алгебраїчним відносно поля Δ, називається трансцендентним відносно Δ.

Зведений многочлен $f(x)$ незвідний у полі Δ, який має *a* своїм коренем, називається *мінімальним многочленом* числа *a,* а його степінь *n* – степенем алгебраїчного числа *a* відносно поля Δ.

Якщо α – число першого степеня відносно Δ, то $\alpha \in \Delta$. При $n > 1$ з незвідності $f(x)$ випливає, що $\alpha \overline{\in} \Delta$. Справді, якби $\alpha \in A$, то подільність многочлена *f(x)* на лінійний двочлен $x - a$ означала б, що $f(x)$ звідний у полі Δ.

Нехай тепер дано довільну числову множину *M*. Очевидно, завжди знайдуться числові поля, які містять всі числа множини *M,* наприклад поле всіх комплексних чисел.

Мінімальним полем $P\{M\}$, що містить дану числову множину *M,* називається поле, яке є перетином усіх числових полів, що містять множину *M*. Зрозуміло, що для будь-якої числової множини *M* мінімальне поле $P\{M\}$ завжди існує і є підполем довільного іншого поли, яке містить множину *M*.

Нехай Δ − деяке числове поле і α − число, яке не належить цьому полю ($\alpha \overline{\in} \Delta$). Розглянемо мінімальне $P\{\Delta, \alpha\}$ яке містить і поле Δ, і число *α*. Очевидно, $P\{\Delta, \alpha\}$ є розширенням поля, причому мінімальним розширенням. Справді, всяке розширення поля *A,* яке містить *α*, міститиме і $P\{\Delta,\alpha\}$ за означенням мінімального поля.

Відомо, що мінімальне розширення поля Δ, яке містить число $\alpha \overline{\in} \Delta$, називають також розширенням поля Δ, утвореним приєднанням числа *α*, і позначають через $\Delta(\alpha)$. Аналогічно можна розглядати розширення $\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$, утворене приєднанням кількох чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ до поля Δ, тобто мінімальне поле $P\{\Delta,\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$, яке містить як Δ, так і числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$. Розширення, утворені приєднанням одного числа, часто називають *простими*.

Поле $\Delta(\alpha)$, утворене приєднанням до поля Δ числа *a,* алгебраїчного відносно поля Δ, називається *простим алгебраїчним розширенням* поля Δ.

Будова простого алгебраїчного розширення характеризується такою теоремою.

Теорема 1.23. Поле $\Delta(\alpha)$, утворене з поля Δ приєднанням кореня *a*, незвідного у полі Δ многочлена *n*-го степеня $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, складається з усіх чисел виду

$$\zeta=c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\cdots+c_{n-1}\alpha^{n-1} \tag{1.3}$$

де $c_0,c_1,\ldots,c_{n-1}$ – довільні числа з поля Δ .

Доведення.

Насамперед покажемо, що всі числа виду (1.3) утворюють поле. Те, що сума і різниця чисел виду (3.1) належить до і тієї самої сукупності, − очевидно. Розглянемо добуток і частку таких чисел. Зрозуміло, що число виду (3.1) можна розглядати як результат підстановки *a* замість *x* у деякий многочлен $q(x)$ над полем Δ не вище (*n* – 1)-го степеня: $\zeta=q(\alpha)$.

Нехай маємо два числа $\zeta_1 = q_1(\alpha)$, $\zeta_2 = q_2(\alpha)$. Тоді добуток $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = q_1(\alpha) \cdot q_2(\alpha) = q(\alpha)$, де *q(x)* – многочлен, степінь якого не може перевищувати (*n* – 1). Поділимо $q(x)$ на *f(x)* з остачею. Маємо:

$$q(x) = f(x)\varphi(x) + r(x), \qquad (1.4)$$

де степінь остачі $r(x)$ менший за степінь многочлена $f(x)$, тобто не перевищує *n*-1. Підставляючи α в тотожність (3.1), маємо $q(\alpha) = r(\alpha)$, тоді $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = r(\alpha)$. Іншими словами, добуток чисел ζ_1 і ζ_2 є числом виду (4.1), де $r(x)$ – многочлен, степінь якого не перевищує *n*-1.

Перейдемо до розгляду частки. Досить показати, що для будь-якого числа $\zeta = q(\alpha) \neq 0$ виду (1) $\frac{1}{r}$ також буде числом виду (1.3). Оскільки *f(x)* незвідний у полі Δ многочлен, то многочлен $q(x)$ або взаємно простий з *f(x)*, або ділиться на *f(x)*. Проте останній випадок неможливий, бо *q(x)* має степінь, менший ніж степінь мінімального многочленна *f(x)*, і тому $(f, q) = 1$.

Отже існує єдина пара многочленів $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ такі, що справджується тотожність $f(x) \cdot \varphi_1(x) + q(x) \cdot \varphi_2(x)$=1. Узявши тут $x = \alpha$ і врахувавши, що $f(\alpha) = 0$ дістанемо $q(\alpha) \times \varphi_2(\alpha) = 1$, тобто $\zeta \cdot \varphi_2(\alpha) = 1$. Отже, $\frac{1}{\zeta} = \varphi_2(\alpha)$. Якщо многочлен $\varphi_2(x)$ містить степінь, менший за *n*, то твердження доведено. Якщо ж $\varphi_2(x)$ містить степінь, не менший за *n*, то ділимо $\varphi_2(x)$ на многочлен *f(x)* з остачею, тобто $\varphi_2(x) = f(x) \cdot \varphi(x) + r(x)$, звідки $\varphi_2(\alpha) = r(\alpha) = \frac{1}{\zeta}$, і степінь $r(x)$ менший за степінь *f(x)*. Отже, $\frac{1}{\zeta}$ є числом виду $\frac{1}{\zeta}$ (1).

Таким чином, числа виду (1.3) справді утворюють поле. Позначимо це поле через Δ_1.

Залишається довести, що $\Delta_1 = \Delta(\alpha)$. Оскільки поле Δ_1 містить як поле Δ_1 так і число *α,* то воно містить і $\Delta(\alpha)$, яке за означенням є мінімальним полем з такими властивостями, тобто $\Delta_1 \Delta(\alpha)$. З другого боку, будь-яке поле, яке включає *a* і поле Δ, повинно включати і всі числа виду (1), які утворюються з чисел поля Δ і числа *a* за допомогою дій множення і додавання. Отже, $\Delta(\alpha) \supseteq \Delta_1$. З обох встановлених співвідношень випливає, що $\Delta_1 = \Delta(\alpha)$.

Для подальшого викладу важливо виділити такий окремий випадок теореми.

Наслідок. Якщо *a* — корінь многочлена другого степеня над полем Δ

$$f(x) = x^2 + px + q$$

причому $a \overline{\in} \Delta$, то просте алгебраїчне розширення $\Delta(\alpha)$ поля Δ, утворене приєднанням числа *a,* складається з усіх чисел виду $a + ba$, де *a,* b – довільні числа з поля Δ.

Введемо таке означення.

Якщо корінь *a* квадратного тричлена над полем Δ не належить полю Δ, то просте алгебраїчне розширення $\Delta(\alpha)$, утворене з поля Δ приєднанням до нього числа *a,* називається *квадратичним розширенням* поля Δ.

Узагальнюючи вище описані спостереження, розглянемо деяке поле Ω і його підполе Δ. Ω лінійний простір над полем Δ. Елементами цього простору є числа з поля Ω, а операціями – додавання елементів поля Q і множення їх на числа з поля Δ.

Розглянемо питання про базис і розмірність цього лінійного простору, нагадавши перед цим деякі означення і факти, відомі з теорії лінійних просторів, стосовно до ситуації, яка нас тут цікавить.

Сукупність чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ з поля Ω називатимемо *лінійно незалежною* системою елементів відносно поля Δ, якщо рівність

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k=0, \qquad (1.5)$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ належать полю Δ, можлива лише при всіх $\lambda_i=0$. Якщо ж рівність (3) справджується і тоді, якщо хоч одне λ_i не дорівнює нулю (нагадаємо, що $\lambda_i\in\Delta$), то система елементів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ називається *лінійно залежною* відносно поля Δ.

Покажемо, що сукупність чисел 1*, a, a*^{2}*, ..., a*$^{n-1}$ є лінійно незалежною системою елементів відносно поля Δ. Справді, запишемо рівність виду (1.5):

$$\lambda_0\cdot 1+\lambda_1\alpha+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha^{n-1}=0,$$

де $\lambda_i\in\Delta$. Якщо ця рівність справджується, коли не всі λ_i дорівнюють нулеві, то це означає, що *a* є коренем деякого многочленна $\varphi(x)=\lambda_0+\lambda_1x+\cdots+\lambda_{n-1}x^{n-1}$ з коефіцієнтами з поля Δ, степінь якого не перевищує *n*-1. Але це неможливо, бо, як відомо, многочлен $f(x)$ степеня *n* є мінімальним многочленом числа *a.*

Отже, коли *a* – алгебраїчне число *n*-го степеня відносно поля Δ, то елементи розширення $\Delta(\alpha)$ є лінійними комбінаціями (з коефіцієнтами з поля Δ) елементів лінійно незалежної відносно Δ системи 1*, a, a*^{2}, ..., *a*$^{n-1}$.

У загальному випадку розглянемо деяке числове поле Δ і його розширення Ω; припустимо, що в полі Q існує лінійно незалежна відносно Δ система елементів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ така, що кожний елемент $\zeta\in\Omega$ подається у вигляді лінійної комбінації чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ з коефіцієнтами з поля Δ.

Систему $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ можна назвати *базисом* розширення Q відносно поля Δ, бо вона утворює базис лінійного простору Q над полем Δ.

Кількість елементів цього базису скінченна і дорівнює *n*. Такі розширення поля мають назву *скінченних*.

Розширення Q поля Δ називається *скінченним*, якщо в полі Q існує така лінійно незалежна відносно поля Δ система елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, що будь-який елемент $\zeta \in \Omega$ є лінійною комбінацією цих елементів з коефіцієнтами з поля Δ:

$$\zeta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \tag{1.6}$$

Система елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називається *базисом* поля Ω відносно поля Δ.

Базис скінченного розширення Δ можна вибрати не одним способом. Проте всі базиси поля Ω мають те саме число елементів *n*. Більш того: довільна лінійно незалежна система з *n* елементів є базисом. Отже, число *n* є характеристикою скінченого розширення *Q* поля Δ, незалежний від вибору базису. Число *n* називається *степенем розширення* Δ над полем Δ і позначається символом $(\Omega : \Delta)$. Зрозуміло, що $(\Omega : \Delta)$ є розмірністю лінійного простору Ω над полем Δ.

Степінь *n* скінченого розширення Q над полем Δ дорівнює максимальному числу *l* елементів поля Ω, які можуть утворювати лінійно незалежну систему. Справедливе й обернене твердження, а саме: якщо *l* – максимальне число елементів розширення Ω поля Δ, що утворюють лінійно незалежну систему відносно поля Δ, то Ω є скінченним розширенням над полем Δ степеня *l*.

РОЗДІЛ 2
ЧОТИРИВИМІРНІ ГІПЕРКОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

2.1. Тіло кватерніонів та його властивості

Пригадаємо, як, згідно з Гауссом [15], прийнято вводити поле комплексных чисел. У звичайному 2-вимірному векторному просторі R_2 над полем дійсних чисел R, реалізованому у вигляді множини пар

$$C = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in R\},$$

поряд з операциями звичайного «покоординатного» додавання й множення на скаляр, визначається ще операція множення, дистрибутивна відносно додавання, наступним чином. Позначимо одиничні вектори

$$e = (1, 0), \qquad i = (0, 1)$$

і визначимо для них операцію множення таблицею:

·	e	i
e	e	i
i	i	$-e$

В силу дистрибутивного закону, множення однозначним образом продовжується на довільну пару векторів:

$$(a, b)\,(c, d) = (ac + bi)*(ce + di) = (ac - bd)\,e + (ad + bc)\,i = (ac - bd, ad + bc).$$

Відповідність

$$\chi\colon a \to (a, 0),$$

є мономорфізмом поля R дійсних чисел у знову отриману систему, і в силу дистрибутивності множення

$$(a, 0)\,(c, d) = (ac, ad) = a\,(c, d),$$

множення на скаляри можна ототожнити із множенням на вектори виду $(a, 0)$, які за допомогою мономорфізму χ можна ототожнити з відповідними числами a. Зокрема, вектор e ототожнюється тоді з одиницею 1 поля R, так що можна перейти до прийнятого запису

$$(a, b) = a\,(1, 0) + b\,(0, 1) = ae + bi = a \cdot 1 + bi = a + bi.$$

Безпосередньо проверяется, що для так введених операцій додавання й множення векторів множина C утворює поле. Зупинимося тільки на доведенні існування оберненого елемента. Вводиться в розгляд поняття комплексно спряженого числа:

$$\iota\colon \alpha = a + bi \rightarrow \overline{\alpha} = a - bi.$$

Тоді

$$\overline{\overline{\alpha}} = \alpha, \quad \overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta},$$

у силу чого перехід до комплексно спряженого числа – інволюція; далі з'являються норма й модуль:

$$\mathrm{Nr}(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = a^2 + b^2 \geq 0 \in R, \ |\alpha| = \sqrt{\mathrm{Nr}(\alpha)},$$

причому виконуються наступні закони:

$$\mathrm{Nr}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0, \ \mathrm{Nr}(\alpha\beta) = \mathrm{Nr}(\alpha) \cdot \mathrm{Nr}(\beta), \ |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

Крім того

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

Але тоді для будь-якого $\alpha = a + bi \in C, \ \alpha \neq 0$, існує обернений элемент

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{\mathrm{Nr}(\alpha)}.$$

Як показав ще В.Гамильтон [6] в 1850 році, якщо відмовитися від комутативності множення, то дуже схожу систему можна побудувати у векторному просторі розмірністю 4 над полем дійсних чисел. Перевіремо таку конструкцію: вона дуже схожа на конструкція поля комплексних чисел.

Будемо розглядати чотирьохвимірний числовий векторний простір R_4 над полем дійсних чисел

$$H = \{(a_0, a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in R, i = 0, 1, 2, 3\}.$$

Одиничні вектори цього простору позначимо так:

$$e = (1, 0, 0, 0),\ \ i = (0, 1, 0, 0),\ \ j = (0, 0, 1, 0),\ \ k = (0, 0, 0, 1).$$

Додавання й множення на дійсні числа в H визначаються так, як звичайно це робиться для числових векторів, так що для $\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ природний запис

$$\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0e + a_1i + a_2j + a_3k,$$

і в такому записі додавання двох елементів

$$\alpha = a_0e + a_1i + a_2j + a_3k \text{ і } \beta = b_0e + b_1i + b_2j + b_3k$$

виглядає так:

$$\begin{aligned}&(a_0e + a_1i + a_2j + a_3k) + (b_0e + b_1i + b_2j + b_3k) = \\ &= (a_0 + b_0)e + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k.\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Множення досить визначити для одиничних базисних векторів e, i, j, k: воно автоматично може потім бути поширене на всі елементи α, β завдяки дистрибутивності. Це множення ми визначимо так:

$$e^2 = e,\quad ei = ie = i,\quad ej = je = j,\quad ek = ke = k;$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -e;$$

$$ij = k,\quad jk = i,\quad ki = j,$$

$$ji = -k,\quad kj = -i,\quad ik = -j,$$

що корисно звести до таблиці множення:

	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	$-i$
k	k	j	$-i$	$-e$

При продовженні «за дистрибутивністю» множення на довільні елементи α, β з H (починаючи з даного моменту, ми будемо елементи з H називати *кватерніонами*) виходить наступна рівність:

$$\begin{aligned}&(a_0e + a_1i + a_2j + a_3k)(b_0e + b_1i + b_2j + b_3k) = \\ &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)e + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i +\end{aligned} \qquad (2.2)$$

$+ (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_2)j + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)k.$

Відзначимо, наступні *властивості* так введеного множення:

а) Кватерніон e відіграє, вочевидь, роль нейтрального елемента відносно множення. Його доцільно перепозначити в 1, а замість $a \cdot 1$ писати просто a. Тоді ми приходимо до загальноприйнятого запису кватерніону:

$$a_0e + a_1i + a_2j + a_3k = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k\ .$$

б) Множення не комутативне: вже для одиничних векторів i, j, k – вони називаються іноді *уявними одиницями* – ми бачимо, що, наприклад, $ij = k$, а, $ji = -k$, так що очікувати, що H виявиться полем, не можна.

в) Як і у випадку комплексних чисел, відзначимо особливу роль кватерніонів виду (a_0,0, 0, 0): множення на них, згідно визначеним вище законам множення, співпадає з множенням кватерніонів на скаляр, а відображення $a \to (a, 0, 0, 0)$ – мономорфізм [5] поля R в H.

Природно тому такі кватерніони ототожнювати з відповідними дійсними числами й вважати надалі, що поле R міститься в H. Як ми побачимо надалі, цілком доцільно довільний кватерніон розглядати як суму двох кватерніонів:

$$\alpha = a_0 + (a_1i + a_2j + a_3k);$$

a_0 називається *дійсною частиною кватерніона* і позначається через $\mathrm{Re}(\alpha)$, а $a_1i + a_2j + a_3k$ – це *уявна частина*, що позначається через $\mathrm{Im}(\alpha)$. На відміну від комплексних чисел, уявна частина кватерніона є не дійсним числом, а тривимірним вектором, так що кватерніон можна уявляти як пару – дійсне число a_0 і тривимірний вектор (a_1, a_2, a_3). Тому іноді дійсну частину кватерніона називають його *скалярною частиною*, а уявну частину – *векторною*.

г) Для введених додавання й множення кватерніонів легко перевіряються всі аксіоми тіла. Зупинимося на аксіомі існування оберненого елемента.

Так само, як і у випадку комплексних чисел, розглянемо спряжений кватерніон: для будь-якого кватерніона $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ кватерніон $a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ називається *спряженим* і позначається через $\overline{\alpha}$.

Неважко бачити, що відображення $\alpha \to \overline{\alpha}$ є інволютивним антиавтоморфізмом, тобто

$$\forall(\alpha \in H) \quad \left[\overline{\overline{\alpha}} = \alpha\right],$$

$$\forall(\alpha \in H) \quad \forall(\beta \in H) \quad \left[\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}\right],$$

$$\forall(\alpha \in H) \quad \forall(\beta \in H) \quad \left[\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\beta} \cdot \overline{\alpha}\right].$$

Обчислимо добуток $\alpha \cdot \overline{\alpha}$. Отримаємо:

$$\alpha\overline{\alpha} = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \cdot (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) = a_0^2 + a_1^2 + a_3^2. \qquad (2.3)$$

Цей добуток будемо позначати через $\mathrm{Nr}(\alpha)$ і називати *нормою* кватерніона. Норма довільного кватерніона – число дійсне, невід’ємне й дорівнює нулю тільки для нульового кватерніона:

$$\forall(\alpha \in H) \quad [(\mathrm{Nr}(\alpha) \in R \wedge \mathrm{Nr}(\alpha) \geq 0) \wedge (\mathrm{Nr}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0)].$$

Таким чином, для будь-якого кватерніона $\alpha \neq 0$ маємо

$$\alpha \cdot \frac{\overline{\alpha}}{\mathrm{Nr}(\alpha)} = 1, \qquad (2.4)$$

так що α має обернений елемент $\dfrac{\overline{\alpha}}{\mathrm{Nr}(\alpha)}$.

Можна, звичайно, також ввести поняття модуля або абсолютного значення $|\alpha|$ кватерніона α, поклавши $\alpha = \sqrt{\mathrm{Nr}(\alpha)}$.

Відзначимо деякі *властивості тіла кватерніонів* та їх наслідки.

Для норми кватерніонів виконується умова мультиплікативності:

$$\mathrm{Nr}(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{Nr}(\alpha)\,\mathrm{Nr}(\beta),$$

$$\mathrm{Nr}(\alpha \cdot \beta) = (\alpha\beta)\left(\overline{\alpha\beta}\right) = \alpha\beta\overline{\beta}\overline{\alpha} = \alpha\mathrm{Nr}(\beta)\overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}\mathrm{Nr}(\beta) = \mathrm{Nr}(\alpha)\,\mathrm{Nr}(\beta). \qquad (2.5)$$

Це дає безпосереднє доведення числової тотожності, відомій ще Л. Ейлеру [18], згідно з якою добуток двох сум чотирьох квадратів дійсних чисел можна представити у вигляді суми чотирьох квадратів:

$$\left(a_0^2+b_0^2+a_2^2+b_3^2\right)\left(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)=$$
$$=\left(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3\right)^2+\left(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2\right)^2+ \qquad (2.6)$$
$$+\left(a_0b_2-a_1b_3+a_2b_2+a_3b_2\right)^2+\left(a_0b_3+a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0\right)^2.$$

Досить розглянути норму добутку αβ кватерніонів $\alpha=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $\beta=b_0e+b_1i+b_2j+b_3k$, щоб на підставі (2.2) та (2.5) переконатися в правильності тотожності (2.6).

Твердження 2.1. Будь-який кватерніон задовольняє деякому квадратному рівнянню з дійсними коефіцієнтами.

Доведення.

Безпосередньо перевіряється, що кватерніон $\alpha=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ задовольняє квадратному рівнянню з дійсними коефіцієнтами

$$x^2-2a_0x+a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=x^2-2\,\mathrm{Re}(\alpha)x+\mathrm{Nr}(\alpha)=0. \qquad (2.7)$$

Очевидно, що поліном $f(x)=x^2-2\,\mathrm{Re}(\alpha)x+\mathrm{Nr}(\alpha)$ – незвідний квадратний тричлен з кільця поліномів $R[x]$.

Обернено, якщо $g(x)=x^2+2tx+s$ – квадратний тричлен з від'ємним дискримінантом, то будь-який кватерніон $\gamma=c_0+c_1i+c_2j+c_3k$, для якого c_0 = Re (γ) = – t, Nr (γ) = s, є коренем полінома $g(x)$.

Твердження доведено.

Таких кватерніонів, що обертають у нуль даний квадратний тричлен, навіть континуум. Ми бачимо, що, на відміну від відомої ситуації в полі, що випливає з теореми Безу [9], де поліном степені n не може мати більше ніж n коренів, у тілі поліном може мати нескінчену множину коренів.

Покажемо, що множення кватерніонів в деякому сенсі охоплює як скалярне, так і векторне множення тривимірних векторів. Дійсно, будемо розглядати “чисто уявні” кватерніони, тобто такі, дійсна частина яких дорівнює нулю. Чисто уявні кватерніони знаходяться у взаємнооднозначній відповідності із сукупністю всіх тривимірних векторів над полем R. Для чисто уявних кватерніонів $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ закон множення (2.2) набуває більш простої форми:

$$(x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_1 i + y_2 j + y_3 k) = -(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) + \\ + (x_2 y_3 - x_3 y_2) i + (x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k. \qquad (2.8)$$

Згадуючи скалярне й векторне множення векторів, ми бачимо, що множення кватерніонів (1.8) тривимірних векторів дає

$$x \cdot y = -(x, y) + [x, y], \qquad (2.9)$$

де (,) означає скалярний, а [,] – векторний добуток векторів. Зазначена властивість лежить в основі численних застосувань кватерніонного числення в геометрії, у кінематиці й у механіці (втім, саме для цих цілей Гамильтон [25] й винайшов кватерніони).

Виникає питання, наскільки залежить вищенаведена конструкція кватерніонів від основного поля R? Що вийде, якщо в 4-вимірному просторі K_4 над довільним полем K ввести множення векторів, відповідно до закону (2.2) та таблиці множення кватерніонів? Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Твердження 2.2. Нехай K – довільне поле, і нехай

$$H(K) = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in K, \quad i = 0, 1, 2, 3\}$$

– чотирьохвимірний векторний простір над полем K, в якому за формулами (2.2)) визначене множення. Тоді $H(K)$ – кільце, що містить поле K, і навіть алгебра над K. Кільце $H(K)$ буде тілом тоді й тільки тоді, коли

$$\forall\ (x_0, x_1, x_2, x_3)\ \ [\,x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Rightarrow$$

$(x_0 = 0 \wedge x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 0)]$.

2.2. Характеристика тіла кватерніонів та теорема Фробеніуса

Розглянемо твердження, що характеризують основні властивості тіла кватерніонів.

Твердження 2.3. Нехай K – поле характеристики, відмінної від 2. Будь-яке некомутативне надтіло D рангу 4 над K, є тілом кватерніонов над K.

Доведення.

Ранг тіла D над своїм центром є квадратом [10], отже, центр D дорівнює K. Нехай L – максимальне підполе тіла D; тоді одержуємо, що $[L : K] = 2$, і, оскільки характеристика поля K не дорівнює 2, L має вид $K(u)$, де $u^2 \in K$ [12]. Звідси випливає, що K – автоморфізм $\vartheta : \lambda + \mu u \to \lambda - \mu u$ є звуженням на $K(u)$ деякого внутрішнього автоморфізму $x \to vxv^{-1}$ тіла D. Так як автоморфізм ϑ не тотожній то $v \overline{\in} L$; але ϑ^2– тотожній автоморфізм, отже, ϑ^2 належить комутанту підполя L в D, тобто L. Більш того, $v \in K$: якщо $v^2 \overline{\in} K$, то $L = K\left(v^2\right)$ і ϑ – тотожній автоморфізм поля L.

Покладемо $u^2 = \alpha$, $v^2 = \beta$ і $uv = w$. Тоді $vuv^{-1} = -u$, тобто $uv = -vu$ і $w^2 = uvvu = -u^2v^2 = -\alpha\beta$, $vw = vuv = -uv^2 = -\beta u$, $wv = uv^2 = \beta u$, $wu = uvu = \ = -u^2v = -\alpha v$, $uw = u^2v = \alpha v$. Залишається довести, що елементи 1, u, v, w утворюють базис тіла D над K. Але в противному випадку існують такі елементи λ, μ, $\nu \in K$, що $w = \lambda + \mu u + \nu \upsilon$, отже, $(u + v)\upsilon = \lambda + \mu u$, звідки випливає, що $\upsilon \in K(u) = L$.

Твердження доведено.

Наслідок. Нехай D – некомутативне тіло скінченого рангу над своїм центром K. Якщо для будь-якого $x \in D$ поле $K(x)$ має ранг ≤ 2 над K та характеристика поля K відмінна від 2, то D – тіло кватерніонів над K.

Доведення.

Нехай L – максимальне підполе тіла D, сепарабельне розширення поля K. Це розширення моногенне [7] та, за припущенням, має ступінь $\leq$ 2. Отже, $[D, K] = 1$ або $[D, K] = 4$ []. Так як D некомутативне, то $[D, K] = 4$, і можна застосувати твердження 2.1.

Нехай K – поле і D – тіло кватерніонів над K. Ізоморфізм $x \to \overline{x}$ тіла D на D^0 є інволюцією [8], та для будь-якого $x \in D$ елементи $x + \overline{x}$ і $\overline{xx}$ належать центру тіла D. Обернено:

Твердження 2.4. Нехай D – некомутативне тіло характеристики, відмінної від 2, скінченого рангу над своїм центром K. Нехай $x \to x^j$ – K-ізоморфізм тіла D на протилежне тіло D^0, такий, що при будь-якому $x \in D$ елементи $x + \overline{x}$ *і* $\overline{xx}$ належать K. Тоді D – тіло кватерніонів над K, і $x^j = \overline{x}$ для будь-якого $x \in D$.

Доведення.

Насправді, для будь-якого $x \in D$ справедлива рівність $x^2 - x(x + x^j) + xx^j = 0$, звідки випливає, що поле $K(x)$ має над K степінь $\geq$ 2. За наслідком твердження 2.1 D є тілом кватерніонів над K. Крім того, якщо $x \overline{\in} K$, то $X^2 - (x + x^j)X + xx^j$ – мінімальний многочлен елемента x над полем K в $K(x)$. Але $x^2 - (x + \overline{x})x + \overline{xx}$ також дорівнює 0, звідки випливає, що багаточлен $X^2 - (x + \overline{x})X + \overline{xx}$ є мінімальним многочленом елемента x в $K(x)$; тому $x^j = \overline{x}$.

Твердження доведено.

Розглянемо також питання про те, чи існують поряд з комплексними числами й кватерніонами ще й інші алгебри скінченого рангу над полем дійсних чисел, що мають ділення? Відповідь виявляється негативною. І хоча в класі неасоціативних алгебр відомі ще алгебри розмірності 8 над R – октави Келі, а також ряд алгебр, що утворюються з комплексних чисел й кватерніонів деякою «порчей» множення, проте це питання для неасоціативних алгебр вирішено ще не повністю.

Відповідне важливе твердження відомо, як теорема Фробеніуса (Г. Фробеніус, 1849 – 1917).

Теорема Фробенуса. З точністю до ізоморфізму існує лише комутативна алгебра з діленням скінченого рангу, відмінного від 1, над полем R, а саме – поле комплексних чисел, і тільки одна некомутативна (але асоціативна) алгебра скінченого рангу з діленням – тіло кватерніонів.

Доведення.

Розіб'ємо доведення теореми на ряд етапів. Нехай $\mathfrak{I}$ – алгебра скінченого рангу з діленням над полем Q дійсних чисел.

а) Мінімальний поліном кожного $t \in \mathfrak{I}$ повинен бути незвідним поліномом з $R[x]$ – в іншому випадку алгебра містила б дільники нуля й алгеброю з діленням бути не могла б. Але незвідні поліноми над R вичерпуються поліномами першого степеня й квадратними поліномами $x^2 + 2\alpha x + \beta$ з від'ємним дискримінантом $D = \alpha^2 - \beta < 0$. Зрозуміло, що якщо мінімальний поліном для $t \in \mathfrak{I}$ першого степеня, то $t \in R$. Припустимо, що $t \notin R$, тоді мінімальний поліном для t має вигляд

$$f_t(x) = x^2 + 2\alpha x + \beta,$$

де $\alpha^2 - \beta < 0$.

б) Моногенна алгебра $R(t)$, породжена яким-небудь $t \in \mathfrak{I}$, $t \notin R$, ізоморфна алгебрі (полю) комплексних чисел.

Так як мінімальний поліном $f_t(x)$ – поліном другого степеня, то ранг $(R(t) : R) = 2$. Маємо:

$$0 = t^2 + 2\alpha t + \beta \Rightarrow (t+\alpha)^2 + \beta^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}(t+\alpha)\right)^2 = -1$$

,

так що для

$$m = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}(t+\alpha)$$

одержуємо $m^2 = -1$, $m \notin R$ і $m \in R(t)$, тобто алгебра

$$R(t) = R(m) = R[x]/(x^2+1)$$

дійсно ізоморфна полю *C***.** Елементи $m \in \mathfrak{I}$, для яких $m^2 = -1$, будемо називати *нормованими*.

в) Будь-яка коммутативная підалгебра $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{I}$ моногенна та ізоморфна полю комплексних чисел. Якщо $s, t \in \mathfrak{I}$, $s \notin R$, $t \notin R$, $R(s) \neq R(t)$, *то* $R(s) \cap R(t) = R$, і в цьому випадку 1, *s, t* лінійно незалежні над *R*.

Комутативна підалгебра $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}$ – поле й, отже, скінчене алгебраїчне розширення поля *R*. Відповідно до теореми про примітивний елемент [15], воно породжується одним-єдиним елементом $t \in \mathfrak{I}$, і, згідно б), ізоморфно полю комплексних чисел.

Якщо $m \in R(s) \cap R(t)$ і $m \notin R$ то $R(m) = R(s) = R(t)$. Розглянемо лінійну оболонку {1, *s, t* } – суму *V* підпросторів

$$V_1 = \{\alpha + \beta s\} \text{ і } V_2 = \{\alpha + \beta t\}.$$

Їх перетин є *R* – одномірний простір.

Відповідно до теореми про розмірність суми й перетину [13]:

$$Dim(V_1 + V_2) = = Dim(V_1) + Dim(V_2) - Dim(V_1 \cap V_2),$$

тому *V* має розмірність 3 й елементи 1, *s, t* лінійно незалежні.

Відзначимо тут же ще таку властивість. Якщо $t \notin R$ і $s \notin R(t)$, то *s* і *t* не комутують: $st \neq ts$. Інакше $R(s, t)$ – підалгебра, породжена *t* і *s*, – була б комутативна й мала б ранг ≥ 3 над *R*, що неможливо.

Ми можемо тепер сформулювати твердження, що становлять центральну частину доведення теореми.

г) Нехай ранг ($\mathfrak{I} : R$) ≥ 3, так що для будь-якого $t \in \mathfrak{I}$ поле $R(t)$ строго міститься в $\mathfrak{I}$. Нехай $s \notin R$, $\hat{s} : x \mapsto sxs^{-1}$ – автоморфізм алгебри $\mathfrak{I}$, відмінний від тотожного. Центр $Z(\mathfrak{I})$ алгебри $\mathfrak{I}$ співпадає з R.

Якщо $t \in R$ і $s \notin R(t)$, то обмеження $\hat{s}$ на $R(t)$ – не тотожній ізоморфізм поля $R(t)$ на поле $R(sts^{-1})$. Якщо при цьому ще s – нормований елемент, то для $t \notin R$ такого, що $s \notin R(t)$, обмеження $\hat{s}$ на $R(t)$: $\hat{s} : R(t) \to R(sts^{-1})$ – автоморфізм поля, що залишає на місці лише елементи з R. Так як

$$\forall(x, y \in \mathfrak{I})\left[s(x \pm y)s^{-1} = sxs^{-1} \pm sys^{-1}\right],$$

$$\forall(x \in \mathfrak{I})\forall(\alpha \in \mathbf{R})\left[s\alpha xs^{-1} = \alpha sxs^{-1}\right],$$

то $\hat{s}$ – дійсно автоморфізм алгебри $\mathfrak{I}$. (Такі автоморфізми прийнято називати *внутрішніми*). При цьому $t^{\hat{s}} = t$ для $t \notin R$ тоді й тільки тоді, коли $t \in R(s)$. Так як ранг ($\mathfrak{I} : R$) ≥ 3, існує $t \in \mathfrak{I}$ таке, ще $t \notin R(s)$, $t^{\hat{s}} \neq t$, і автоморфізм $\hat{s}$ відмінний від тотожного. Лише в тому випадку, коли $s \in R$, автоморфізм $x \mapsto sxs^{-1} = x$ тотожний, тобто s комутує з усіма елементами алгебри $\mathfrak{I}$. Тим самим, центром алгебри $\mathfrak{I}$ є основне поле R. Зрозуміло, звичайно, що обмеження $\hat{s}$ на поле $R(t)$ для $s \notin R(t)$ – ізоморфізм поля $R(t)$ на поле $R(sts^{-1})$.

Припустимо тепер, що $s = j$ – нормований елемент з $\mathfrak{I}$, тобто:

$$j^2 = -1 \Rightarrow j^{-1} = -j.$$

Нехай $t \notin R$ такий, що $j \notin R(t)$. Покладемо $jt(-j) = t'$; тоді

$$jt'(-j) = j^2 t(-j)^2 = -1 \cdot t(-1) = t$$

і, тим самим,

$$j(t + t')(-j) = t + t',$$

так що $t + t'$ комутують з j а, отже, $t + t' = \alpha + \beta j$.

Покладемо $l = t - \frac{1}{2}(\alpha + \beta j)$; тоді, очевидно, $j \notin R(l)$ і

$$jl(-j) = t' - \frac{1}{2}(\alpha + \beta j) = l'. \tag{2.10}$$

Навпаки,

$$jl'(-j) = t - \frac{1}{2}(\alpha + \beta j), \tag{2.11}$$

і додавання рівностей (2.10) та (2.11) показує, що

$$j(l + l')(-j) = (t + t') - (\alpha + \beta j) = 0 \Rightarrow l + l' = 0 \Rightarrow l = -l'.$$

У полі $R(l)$ відображення $R(l) \to jR(l)(-j)$ є автоморфізмом поля $R(l)$. Нехай

$$g_l(x) = x^2 + \gamma x + \delta$$

– мінімальний поліном для l. Так як $\hat{j}$ – автоморфізм поля $R(l)$, що залишає на місці елементи з R, то справедливі рівності

$$j0(-j) = j\left(l^2 + \gamma l + \delta\right)(-j) = l'^2 + \gamma l' + \delta = 0,$$

тобто l'– також корінь полінома $g_l(x)$; згідно формулам Вієта, $\gamma = -(l + l') = 0$.

Маємо тепер $l^2 = -\delta < 0$, завдяки чому при $i = \frac{1}{\sqrt{\delta}} l$ отримуємо, що

$$i^2 = -1,\ R(l) = R(i) \text{ и } ji\,(-j) = -i \Rightarrow ij = -ji.$$

д) Покладемо $ij = k$; тоді $k \notin R(i)$ і $k \notin R(j)$.

Крім того,

$$k^2 = ij \cdot ij = (-1) \cdot i^2 \cdot j^2 = -1,\ ki = iji = -i^2 j = j$$

і, аналогічно,

$$ik = -j,\ jk = i,\ kj = -i,$$

так, що множення лінійно незалежних елементів 1, i, j, k в $\mathfrak{I}$ здійснюється за правилами множення базисних одиниць кватерніонів.

Підалгебра $R(i, j) \in \mathfrak{I}$ – алгебра рангу 4, ізоморфна алгебрі кватерніонів. Залишилося показати, що ця підалгебра збігається з усією алгеброю $\mathfrak{I}$.

Припустимо, що існує ще деякий елемент $l_1 \in \mathfrak{I}$, який не належить підалгебрі $\mathfrak{R} = R(i, j)$, і зведемо це припущення до протиріччя. Як і вище в пункті г), $l_1 + il_1(-i)$ – елемент, що комутує з i, а отже, виду $\alpha + \beta i$. Поклавши

$$l_2 = l_1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta i),$$

ми бачимо, що $l_2 \notin \mathfrak{R}$ і $il_2(-i) = -l_2$, а якщо ще покласти $l = \frac{1}{\mathrm{Nr}(l_2)} l_2$, то, крім того, $l^2 = -1$, де l – елемент нормований, що не належить $\mathfrak{R}$ і $il(-i) = -l$. Але оскільки тоді $il = -li$, то $lil^{-1} = li(-l) = -i$. З іншого боку, $ji(-j) = -i$. Таким чином, елемент jl комутує з елементом i і, отже, належить $R(i)$. Але тоді $l = (-j)(jl) \in \mathfrak{R}$. Отримали протиріччя.

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було розглянути основні теоретичні відомості з теорії числових полів (поле дійсних чисел, поле комплексних чисел), а також скінчені розширення числових полів; розглянуто основні властивості тіла кватерніонів; визначено умови, при яких існує комутативна (або асоціативна) алгебра скінченого рангу над полем дійсних чисел. Одержано такі основні твердження.

Поле *C* є мінімальним розширенням поля дійсних чисел *R,* що містить елемент, квадрат-якого дорівнює -1. Кожне мінімальне розширення поля дійсних чисел *R,* що містить елемент, квадрат якого дорівнює -1, ізоморфне полю *C*.

Будь-який кватерніон задовольняє деякому квадратному рівнянню з дійсними коефіцієнтами. Множення кватерніонів в деякому сенсі охоплює як скалярне, так і векторне множення тривимірних векторів. Дійсно, будемо розглядати “чисто уявні” кватерніони, тобто такі, дійсна частина яких дорівнює нулю. Чисто уявні кватерніони знаходяться у взаємнооднозначній відповідності із сукупністю всіх тривимірних векторів над полем *R*

Нехай К – поле характеристики, відмінної від 2. Будь-яке некомутативне надтіло *D* рангу 4 над *K*, є тілом кватерніонов над *K*.

Нехай *D* – некомутативне тіло характеристики, відмінної від 2, скінченого рангу над своїм центром *K.* Нехай $x \to x^j$ – *K*-ізоморфізм тіла *D* на протилежне тіло D^0, такий, що при будь-якому $x \in D$ елементи $x + \bar{x}$ *і* $\overline{xx}$ належать *K.* Тоді *D* – тіло кватерніонів над *K*, і $x^j = \bar{x}$ для будь-якого $x \in D$.

Відповідь на питання про існування альтернативних лінійних алгебр скінченого рангу над полем дійсних чисел сформульована в теоремі Фробеніуса: з точністю до ізоморфізму існує лише комутативна алгебра з діленням скінченого рангу, відмінного від 1, над полем R, а саме – поле комплексних чисел, і тільки одна некомутативна (але асоціативна) алгебра скінченого рангу з діленням – тіло кватерніонів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Айерлэнд К. Классическое введение в теорию чисел. – М.: Мир, 1987. – 462 с.
2. Александров П.С. Введение в теорию групп. – М.: Наука, 1980. – 180 с.
3. Арнольд И.В. Теория чисел. – М.: Учпедгиз, 1939. – 287 с.
4. Бахтурин Ю.А. Основные структуры современной алгебры. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
6. Бородін О.І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 247 с.
7. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. – М.: Наука, 1966. – 556 с.
8. Буштаб А.А. Теория чисел. – М.: Учпедгиз, 1960. – 376 с.
9. ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 346 с.
10. Вейль А. Основы теории чисел / Под ред. Пятецкого И.И. – М.: 237с.
11. Виленкина Н.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 84.
12. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1969. – 238 с.
13. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – К.: Либідь, 1995. – 280 с.
14. Дринфельд Г.И. Квадратура круга и трансцендентность числа. – К.: Вища школа, 1976. – 84 с.
15. Кавун Н.И. Обоснование теории вещественных чисел по способу А.Н. Колмогорова. – К.: Успехи математических наук, т. II, вип. 5, 1947.
16. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973. – 348 с.

17. Каргополов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
18. Кон П. Универсальная алгебра. – М.: Мир, 1968. – 312 с.
19. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 248 с.
20. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
21. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.
22. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1998. – 324 с.
23. Курош А.Г. Теория групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 468 с.
24. Кымпан Ф. История числа π. – М.: Наука, Гл. ред. физ.мат. лит.,1987. – 239 с.
25. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
26. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. – М.: Просвещение, 1974. – 526 с.
27. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 234 с
28. Михелович Ш.Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1967. – 358 с.
29. Общая алгебра / Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др.; Под ред. Скорнякова Л.А. – М.: Наука, 1990. – 592 с.
30. Окунев Л.Я. Краткий курс теории чисел. – М.: Учпедгиз, 1975. – 426 с.
31. Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. – М.: Наука, главная редакция физ.-мат. литературы, 1991. – 656 с.
32. Скорняков Л.А. Элементы алгебры. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 240 с.
33. Судзуки М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп. – М.: ИЛ, 1960. – 212 с.
34. Шидловский А.Б. Диафантовы приближения и трансцендентность чисел. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 264 с.

ДОДАТОК А

КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Я, Голофєєва Дар'я Віталіївна, учасниця освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльності **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальностей до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

27.04.2022 Голофєєва Дар'я Віталіївна