МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ФУНКТОРИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

Виконала: студентка 2 курсу, 221М групи
Спеціальності 014 Середня освіта
Спеціалізація 014.04 Математика
Освітньо-професійної програми «Середня освіта (математика)»
Конотоп Катерина Анатоліївна
Керівник доктор фізико-математичних наук,
професор Савченко Олександр Григорович
Рецензент докторка педагогічних наук,
кандидатка фізико-математичних наук,
професорка кафедри інформаційних технологій
та фізико-математичних дисциплін Херсонської
філії Національного університету кораблебуду-вання імені адмірала Макарова
Літвінова Марина Борисівна

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.. 3
РОЗДІЛ 1. Загальні поняття про функтори експоненціального типу. 8
1.1. Метричні топологічні простори 8
1.2. Простір замкнених підмножин 16
1.3. Функтори експоненціального типу 20
РОЗДІЛ 2. Деякі теоретичні положення з теорії многовидів 28
2.1. Аналіз наукової психолого-педагогічної та методологічної літератури з проблеми дослідження 28
2.2. Визначення ріманового многовиду 31
2.3. Експоненціальне відображення 35
РОЗДІЛ 3. Експериментально-дослідна робота 42
3.1. Наукові основи вивчення функції експоненціального виду в школі... 42
3.2. Елективний курс «Знайомство з двовимірними та многовидами»50
3.3. Експериментальна перевірка результативності курсу 53
Висновки 57
Список використаних джерел 59
Додатки 63
Додаток А 63
Додаток Б 64

ВСТУП

Актуальність теми. У даний час на фоні динаміки процесів зміни структури, змісту та навіть самої концепції шкільної математичної освіти особливо гостро стоїть питання підвищення якості, а отже і глибини математичних знань учнів. У зв'язку з цим досить актуальним виявляється розгляд питання природи математичних, в тому числі й геометричних знань.

Елементарна геометрія оперує величинами (відстані, кути, площі), які не змінюють своїх значень при рухах фігур, тоді як проектна геометрія займається такими поняттями (точка, пряма, подвійне відношення), які зберігаються при більш широкій групі проектних перетворень. Проте і рухи, і подібність, і проективні перетворення – це лише частинні випадки більш загальних топологічних перетворень. Топологія вивчає найбільш загальні властивості геометричних фігур, що пов'язані з "дотиком" частин фігури і з поняттям "неперервність" в найбільш загальному вигляді.

Топологічні властивості фігур становлять великий інтерес: у відомому сенсі це найглибші, основні геометричні властивості, оскільки вони зберігаються при досить "різких" перетвореннях.

В даний час геометрію розуміють як теорію структур більш різноманітних, ніж структура топологічного простору. Тобто всі простори, що вивчаються в геометрії, перш за все є топологічними просторами. Більш того, це топологічні простори із збагаченою структурою. Такий погляд на геометрію є узагальненням точки зору Ф. Клейна, сформульованої понад сто років тому.

З топологічними поняттями учням постійно доводиться мати справу в курсі геометрії: граничні і внутрішні точки, геометричне тіло, його поверхня тощо. Такі фундаментальні топологічні поняття як "внутрішня область", "зовнішня область", "межа" лежать в основі сприйняття будь-якої двовимірної або тривимірної фігури, що вивчається в шкільному курсі планіметрії та стереометрії, і яка визначається як частина площини або простору, обмеженої певною лінією або поверхнею відповідно.

На сучасному етапі розвитку математичної освіти до вихідних положень, що визначають специфіку методичної системи навчання математики, також слід відносити психологічну структуру особистості, закономірності її розвитку. Тобто, необхідно мати деяку модель, що описує вікові та індивідуальні особливості математичного мислення школярів, щоб відповідно до неї будувати процес навчання. Така модель побудована Ж. Піаже і далі розвинена в працях П.-Х. Ван Хіллі, Л. М. Веккера, Н. Вінера, А. Н. Колмогорова, В. А. Крутецького та ін.. Вона базується на положенні про ізоморфізм основних математичних структур (виділених М. Бурбакі: алгебраїчні, метричні, проективні та топологічні) структурам мислення дитини. Причому топологічна структура є первинною по відношенню до проективної і метричної підструктур мислення. Топологічні просторові уявлення лежать в основі сприйняття об'єктів, у тому числі і геометричних фігур, і створюють базу для розвитку в учнів проективних і метричних просторових уявлень. Отже, і навчання має будуватися відповідно до розвитку математичного мислення учнів.

Проте в жодному з діючих підручників з математики не прослідковується топологічна лінія. Елементарні топологічні уявлення присутні, проте вони "випадкові", не мають розвитку. Проблемою введення елементів топології в шкільний курс математики в різні роки займалися: А. Н. Колмогоров , І. Ф. Шаригін, А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. І. Рижик, Б. Є. Кантор, Колягін та ін..

Деякі завдання топологічного характеру входять до основного змісту курсу математики з позначкою "для учнів, які захоплюються математикою" (Н. Я. Віленкін, С. І. Шварцбург, І. Ф. Шаригін).

Топологічний матеріал пропонується для позакласної роботи, причому він виділений в окремий блок (І. Ф. Шаригін, А. Ю. Тимофєєв, В. Д. Яковлєв). Окремі теми пропонуються для 10-11-их класів з поглибленим вивченням математики (А. Д. Александров, А. Л. Вернер, Б. Є. Кантор).

Підходи до цієї проблеми відрізняються різними аспектами: глибиною, характером і організацією викладу топологічного матеріалу, віковою групою учнів, для якої призначається той чи інший посібник.

Більшість авторів розглядають навчання елементам топології лише для гуртків, факультативів або для класів і шкіл з поглибленим вивченням математики. При цьому вони обмежуються розглядом вузького класу топологічних завдань (наприклад, завдань що вирішуються за допомогою графів) або окремих топологічних завдань як цікавих.

Основним недоліком гурткових і факультативних занять, описаних в існуючих посібниках, є їх слабкий зв'язок з матеріалом, який вивчається на уроках. Це веде до того, що топологічні властивості різних об'єктів сприймаються у відриві від інших їх властивостей. При цьому в учнів складається враження, що топологія – це щось зовсім інше, ніж геометрія. З огляду на ці фактори, оптимальним способом організації навчального процесу представляється елективний курс з викладання елементів топології, який пролонгує, розвиває урок. Такий підхід дозволяє виявити найбільш глибокі (топологічні) властивості геометричних об'єктів, що вивчаються на уроці, тобто робить знання учнів більш ґрунтовними, розвиває їх творчі здібності та інтерес до математики як до предмету.

Протиріччя між існуючими вимогами до математичної підготовки здобувачів повної середньої освіти та відсутністю топологічної лінії при викладання геометрії в школі обумовлює актуальність проблеми пошуку умов та засобів реалізації навчання елементам топології в курсі математики основної школи.

Мета дослідження – розкрити сутність поняття функторів експоненціального типу та розробити методичне забезпечення навчання елементам топології у курсі математики основної школи.

Об'єктом дослідження є розділ топології, пов'язаний з поняттям відображень експоненціального типу, а **предметом** – безпосередньо функтори зазначеного типу та двовимірні та тривимірні многовиди.

Опис нових об’єктів за добре вивченими грає важливу роль у математиці. Достатньо згадати як послідовно будуються спочатку натуральні числа, потім цілі, за ними вводяться раціональні числа, потім дійсні і, нарешті, комплексні. Нові математичні поняття і конструкції, які виникають у подібних побудовах, із однієї сторони є об’єктами самостійних досліджень, а з іншої – дають методи для розв’язання раніше поставлених задач. У нашій роботі розглядаються гіперпростори топологічних просторів.

Завдання дослідження:

1) проаналізувати навчально-методичну літературу з теми «Многовиди»;

2) розглянути гіперпростори топологічних просторів достатньо загальної природи без додаткових структур та ознайомитися з основними положеннями теорії многовидів;

3) розробити елективний курс «Знайомство з двовимірними многовидами» для здобувачів освіти старшої школи.

Для розв’язування поставлених завдань застосовувалися такі **методи науково-педагогічного дослідження**: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; практичні: розробка елективного курсу; експериментальні; емпіричні: спостереження, експеримент, тестування, бесіди.

Новизна. Розроблено елективний курс з теми «Знайомство з двовимірними просторами» та експериментально перевірено, а також показано, що елективний курс сприяє розвитку алгоритмічної культури та пізнавального інтересу здобувачів середньої освіти.

Практичне значення. Дану роботу можуть використовувати як вчителі математики, так і студенти математичних спеціальностей, які цікавляться даною темою.

Дослідження ми реалізовували у межах **теми науково-дослідної роботи** «Формування професійної компетентності майбутніх вчителів математики на сучасному етапі соціально-економічного розвитку України» (державний реєстраційний номер 0117U001734) кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу Херсонського державного університету.

Апробація. Основні результати дослідження були представленні на трьох конференціях: Всеукраїнській науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти і молодих вчених «Класичні та прикладні аспекти спадкоємної математичної підготовки у ЗВО : історичний та сучасний погляд молодих вчених і здобувачів вищої освіти» (м. Харків, 8 – 9 квітня 2021 р.); Дистанційній Всеукраїнській науковій конференції (з міжнародною участю) «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» до 90-річчя з дня народження професора З. І. Слєпкань (м. Київ, 15 – 16 квітня 2021 р.); Всеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні проблеми природничо-математичної освіти в Україні» (м. Херсон).

Публікації. Результати дослідження опубліковано у чотирьох збірниках матеріалів та тез конференцій.

Структура. Робота побудована за логічною структурою, яка складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи 95 сторінок, з них 62 – основний текст.

РОЗДІЛ 1
ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО ФУНКТОРИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

1.1. Метричні топологічні простори

При розв'язанні геометричних задач ми часто користуємося поняттям відстані. Виявляється, що багато математичних об'єктів припускають чисельні оцінки, властивості яких аналогічні властивостям відстані між точками на площині. Щоб пояснити, яку аналогію ми маємо на увазі, зауважимо, що у геометричних задачах точки як такі, поки що із ними не пов'язані будь-які об'єкти, тіла, позбавленні всякої внутрішньої індивідуальності. За своїми властивостями будь-які дві точки площини ідентичні. Положення точки на площині – це єдина її індивідуальна властивість, і відстань грає роль міри відмінності однієї точки від іншої [40].

Даний приклад може слугувати моделлю наступної загальної ситуації. Маємо деяку множину Z, на природу елементів якої ми не накладаємо зараз ніяких умов, але, що для нас важливо, відмінність у властивостях її елементів припускають чисельну міру. Значення цієї міри для пари елементів $x, y \in X$ позначимо через $\rho\,(x, y)$. У випадку точок на площині $\rho\,(x, y)$ – відстань між точками x та y. Зміст функції ρ і правила її використання при розв'язанні задач визначаються, звичайно, властивостями множини X та її елементів. Але часто функція ρ володіє властивостями, аналогічними властивостям відстані між точками на площині, а саме для будь-яких елементів x, y і z множини :

а) $\rho\,(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$ (аксіома тотожності);

б) $\rho\,(x, y) = \rho(y, x) \geq 0$ (аксіома симетрії);

в) $\rho\,(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho\,(y, z)$ (аксіома трикутника).

Функція ρ, яка задовольняє умовам *а*), *б*) і *в*), називається метрикою, а множина X, якщо на ній зафіксована деяка метрика, – метричним простором [4].

Багато геометричних властивостей площини мають аналоги у довільному метричному просторі. Щоб підкреслити це, число $\rho\,(x, y)$ називають зазвичай відстанню між точками (елементами) x та y простору X.

Буква ρ є загальноприйнятим, але не єдиним позначенням метрики. Настільки ж часто використовують для цього букву d.

Якщо тепер множина Y лежить у метричному просторі X, то визначена відстань між елементами множини Y, яка, таким чином, також є метричним простором. Зокрема, будь-яка підмножина площини несе структуру метричного простору.

Подамо ще приклади метричних просторів. Позначимо через R множину всіх скінчених послідовностей дійсних чисел із n елементів: $(x_1, \dots, x_n)$ (арифметичний n-вимірний простір). Візьмемо в якості відстані $\rho\,(x, y)$ між точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, \dots, y_n)$ число

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Визначений таким чином метричний простір називається n-вимірним евклідовим простором [40].

Позначимо через l_2 множину всіх нескінченних послідовностей дійсних чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, яка задовольняє умові

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ \dots < \infty.$$

Із цієї умови маємо, що для $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ і $y = \{y_1, y_2, y_3, \dots\} \in l_2$ число

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \ \dots}$$

скінчене. Легко перевірити, що функція ρ задовольняє умовам *а*), *б*) і *в*). Визначений таким чином метричний простір l_2 називається гільбертовим простором.

Ці приклади метричних просторів за своїм геометричним змістом достатньо близькі до простору, який слугував нам моделлю при впровадженні поняття метричного простору, а саме до площини. Насправді метричними просторами можуть виявитися об'єкти, вельми далекі від описаних вище. Наведемо найпростіший приклад такого роду.

Нехай X – довільна множина. Покладемо для $x, y \in X$ $\rho\,(x, y) = 0$, якщо $x = y$ і $\rho\,(x, y) = 1$, якщо точки x та y відмінні. Такий метричний простір називається дискретним метричним простором [41].

Нехай x – довільна точка метричного простору X, ε – довільне додатне число. Назвемо ε-околом точки x у просторі X множину всіх точок простору X (позначимо через $O_\varepsilon x$), що віддаленні від точки x на відстань, менше ніж ε, тобто

$$O_\varepsilon x = \{y: y \in X, \rho\,(x, y) < \varepsilon\}$$

Підмножина U метричного простору X називається відкритою, якщо для будь-якої точки $x \in U$ знайдеться таке число $\varepsilon > 0$, що $O_\varepsilon x \subset U$. Легко перевірити, що:

1) пуста множина і множина X відкриті;

2) об'єднання будь-якого числа відкритих множин є відкритою множиною;

3) перетин будь-якого скінченого числа відкритих множин є відкритою множиною.

Множина τ усіх відкритих множин метричного простору називається її топологією (породжена даною метрикою). На одній і тій же множині може бути визначено декілька метрик. Кожна породжує деяку топологію. Але одна й та ж топологія може породжуватися різними метриками. Більш того, існують топології, тобто множини підмножин даної множини X (які називають відкритими), що задовольняють умовам 1), 2) і 3), які не породжуються ніякими метриками. Множина, на якій зафіксована деяка топологія, називається топологічним простором. Таким чином, кожний метричний простір ми можемо розглядати в якості топологічного простору [2].

Як ми вже зазначили, кожну підмножину метричного простору ми також можемо розглядати в якості метричного простору. У випадку топологічного простору також маємо загальноприйнятий спосіб завдання топології на підмножинах (які у силу цього виявляються топологічними просторами, що називаються підпросторами даного топологічного простору): якщо τ – топологія на множині X та Y – підмножина множини X, то сукупність множин $\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$ є топологією на множині Y (кажуть, що топологія τ_Y індукована топологією τ).

Таким чином, у випадку метричного простору ми отримуємо два способи визначення топології підпростору. Нехай ми маємо метричний простір X із метрикою ρ і підмножину Y множини X. Метрика ρ породжує на множині X деяку топологію τ, а на множині Y – деяку метрику ρ_Y. Топологія τ індукує на множині Y деяку топологію τ_Y, а метрика ρ_Y, у свою чергу, породжує на множині Y деяку топологію τ'. Чудовим і неочевидним фактом є те, що ці дві топології на множині Y, тобто τ_Y і τ', співпадають, тобто індукована топологія породжується індукованою метрикою.

Ряд понять геометричного змісту описуються мовою топології (кажуть, що має топологічний характер). Вводячи будь-яке із цих понять для топологічного простору, ми відразу, без додаткових пояснень, можемо поширити їх на підмножині топологічних просторів, маючи на увазі, що кожне із них несе (однозначно визначену) індуковану топологію [47]. Околом даної точки (відповідно даної множини) топологічного простору ми будемо називати довільну відкриту множину, яка містить дану точку (відповідно дану множину).

Нехай дано точку x і підмножину M топологічного простору. Точка x називається точкою дотику множини M, якщо будь-який її окіл перетинається із множиною M. Множина всіх точок дотику множини M називається замиканням множини M і позначається $[M]$. Як легко побачити, що будь-яка точка множини M є точкою дотику M, і тому $M \subset [M]$. У випадку, якщо це включення переходить у рівність, тобто якщо множина M співпадає зі своїм замиканням, то множина називається замкненою. Виявляється, що підмножина топологічного простору замкнена тоді і тільки тоді, коли доповнення до неї відкрите.

Властивість множини бути замкненою має топологічний характер. Важливим є інший приклад топологічних властивостей. Топологічний простір називається хаусдорфовим, якщо будь-які дві відмінні його точки мають околи, які не перетинаються (будь-який метричний простір є хаусдорфовим: якщо x та y – відмінні точки метричного простору і ε – половина відстані між ними, то $O_\varepsilon x \cap O_\varepsilon y = \emptyset$). Топологічний простір називається бікомпактним (іноді користуються терміном «компакт», але ми будемо використовувати його в іншому сенсі), якщо із будь-якого його відкритого покриття (тобто сімейство відкритих множин, об’єднання яких співпадає з усім простором) можна виділити скінчене підпокриття (тобто підсімейство попереднього сімейства, також є покриттям). Хаусдорфовий бікомпактний простір називається бікомпактом, метричний бікомпактний простір – компактом. Бікомпактні простори мають ряд чудових властивостей. Так, бікомпактна підмножина хаусдорфового простору обов’язково є замкненою. Підмножина евклідового простору бікомпактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена й обмежена (тобто лежить у деякій кулі) одночасно [48].

Топологічний характер має і поняття неперервного відображення (неперервної функції): відображення $f: X \to Y$ топологічного простору

X у топологічний простір Y називається неперервним у точці $x \in X$, якщо для будь-якого околу V точки $f(x)$ у просторі Y знайдеться такий окіл U точки x у просторі X, що $f(U) \subset V$. Неперервним називається відображення, яке неперервне в усіх точках області визначення. До числа чудових властивостей бікомпактних просторів відноситься також те, що неперервний образ (тобто образ при неперервному відображенні) бікомпактного простору є бікомпактним простором.

Ми кажемо, що послідовність точок $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ топологічного простору X збігається до точки $x \in X$, якщо будь-який окіл точки x містить всі елементи послідовності, починаючи із деякого. Точка x при цьому називається границею послідовності $\{x_n\}$. Ми пишемо:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Послідовності, які збігаються, достатньо повно описують топологію метричного простору. Так, точка $x \in X$ належить замиканню, яке лежить у метричному просторі X множини M тоді і тільки тоді, коли існує послідовність елементів множини M, яка збігається до точки x. Відображення $f: X \to Y$ метричного простору X у топологічний простір Y неперервне у точці $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ елементів простору X, що збігається до точки x, послідовність $\{f(x_n) : n = 1, 2, \dots\}$ збігається до точки $f(x)$ у просторі Y [36].

Послідовність $\{x_n\}$ елементів метричного простору X із метрикою ρ називається фундаментальною (або послідовністю Коші), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для будь-яких номерів $m, n \geq N$

$$\rho\,(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Будь-яка послідовність елементів метричного простору, яка збігається, є фундаментальною. Зворотне у загальному випадку неправильне. Метричний простір називається повним, якщо у ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю. Найпростіший приклад неповного простору: множина чисел $\{2^{-n}: n = 1, 2, \ldots\}$ із звичайною відстанню $\rho\,(x, y) = |x - y|$ [38].

Не будь-яка топологія породжується деякою метрикою. Топологічний простір називається метризовним, якщо існує метрика, яка породжує його топологію. Коли ми говоримо, що простір метризовний, то ніяка конкретна метрика не фіксується. Якщо мова йде про метричний простір, завжди маємо на увазі конкретну метрику на ньому.

Добутком двох множин X_1 та X_2 називається множина всіх пар (x_1, x_2), де $x_1 \in X_1$ та $x_2 \in X_2$, добуток трьох множин X_1, X_2 і X_3 – множина всіх трійок (x_1, x_2, x_3), де $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ і $x_3 \in X_3$. Перейдемо до загальної ситуації.

Нехай маємо сукупність множин $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Добутком

$$\prod \{X_\alpha : \alpha \in A\}$$

цієї сукупності називається множина всіх функцій, які визначені на множині A і приймають у довільній точці $\alpha \in A$ значення, яке належить множині X_α. Щоб обговорити це визначення й порівняти його із наведеним вище частинним випадком, розглянемо випадок, коли множина A скінчена. Ми можемо занумерувати елементи множини A і надалі позначити довільний елемент цієї множини номером, який йому присвоєно. Розглянемо довільний елемент f добутку, тобто функцію, яка задовольняє відповідним умовам. Значення $f(k)$ позначимо через x_k. Таким чином, елемент добутку описують рядком $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

У випадку, коли розглядають добуток топологічних просторів, на добутку може бути задана деяка топологія. Перше, що спадає на думку, це признати підмножину U добутком $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ відкритим тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки $x = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ і для кожного індексу $\alpha \in A$ знайдуться такі околи V_α точок x_α (так ми позначили α – у координату точки x добутку, тобто значення відповідної функції у точці $\alpha \in A$), що

$$\prod\{V_\alpha : \alpha \in A\} \subset U.$$

Множина, визначених таким чином, відкритих множин насправді складає топологію на множині X. Ця топологія називається ящиковою топологією добутку.

Проте у значній частині випадків розгляд ящикової топології не відповідає специфіці задачі. Більш корисною виявляється так звана тихоновська топологія добутку. Її визначення повторює визначення ящикової топології, але із веденням додаткових умов: при всіх $\alpha \in A$ (за винятком скінченого числа)

$$V_\alpha = X_\alpha.$$

Зрозуміло, що якщо множина A скінчена, то обидві топології співпадають.

Приклад: n-вимірний евклідовий простір можна розглядати як добуток n прямих – визначені відмінними шляхами топології на множині R^n виявляються співпадаючими [39].

Добуток зліченого числа відрізків називається гільбертовим кубом (стандартне позначення – Q). Топологічна будова простору, яку отримуємо, при цьому не залежить від конкретного вибору відрізків, які ми беремо в якості співмножника. Якщо в якості k-го співмножника взяти відрізок $[0, 1/k]$, то добуток, який отримується можна розглядати в якості підмножини гільбертового простору l_2. При цьому тихонівська топологія добутку є індукована метрикою гільбертового простору.

Нехай маємо відображення $f: X \to Y$ топологічного простору X на множину Y. Називатимемо множину $U \subset Y$ відкритою тоді і тільки тоді, коли відкрита множина $f^{-1}(U)$. Ця топологія називається фактор-топологією. Це нам знадобиться при розгляді розбиття простору

$X: X = \bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, де множини X_α попарно не перетинаються і їх об'єднання співпадають з усією множиною X. Множини X_α, $\alpha \in A$ будемо вважати точками множини Y попереднього розгляду. В якості відображення f візьмемо відображення, яке ставить у відповідність точці $x \in X_\alpha$ множину X_α. Визначений таким чином новий топологічний простір називається фактор-простором простору X за даним розбиттям.

Ми надали опис загальної ситуації. Для прикладу розглянемо частинний випадок. Нехай маємо топологічні простори X_1, X_2, множину Z і відображення $f_i: Z \to X_i$ $(i = 1, 2)$, причому відповідність $f_i: Z \to f_i(Z)$ взаємно однозначна. Будемо вважати, що $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, і покладемо $X = X_1 \cup X_2$. Розглянемо наступне розбиття множини X. Елементами розбиття будемо вважати одноточкові множини $\{x\}$, де $x \in \big(X_1 \setminus f_1(Z)\big) \cup \big(X_2 \setminus f_2(Z)\big)$, і множини виду $\{f_1(z), f_2(z)\}$, де $z \in Z$. Множину X ми можемо вважати топологічним простором: множина $U \subset X$ відкрита у просторі X тоді і тільки тоді, коли відкриті дві множини $U \cap X_1$ та $U \cap X_2$. Можна сказати, що фактор-простір простору X за описаним розбиттям – це результат «приклеювання» простору X_1 до простору X_2: ми «приклеїли» $f_1(Z)$ до $f_2(Z)$, залишивши інші частини просторів X_1 та X_2 без змін.

1.2. Простір замкнених підмножин

Під словами «ми неперервно деформуємо тіло» розуміємо деяке реальне фізичне сприйняття. Але непевність деформації означає, що ми якось, нехай інтуїтивно, порівнюємо між собою фази деформації, оцінюємо їх близькість. Вибір конкретної оцінки цієї близькості можна зробити багатьма способами [41]. Ми розглянемо один з них.

Звернемо увагу на те, що відстань між множинами в якості такої оцінки нас не задовольняє: наприклад, множини можуть перетинатися (і тому відстань між ними буде дорівнювати нулю) і сильно відрізнятися одна від одної за рахунок віддалених частин. Отже, оцінка повинна бути такою, що її малість буде означати близькість однієї множини у всіх своїх частинах до другої. Перекладаючи цю фразу мовою математичних формул, ми приходимо до відхилення $\alpha\,(F_1, F_2)$ множини F_2 від множини F_1 у метричному просторі [41].:

$$\alpha\,(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon \colon \varepsilon > 0, F_2 \subset O_\varepsilon F_1\},$$

де

$$O_\varepsilon F = \{y \colon y \in X, \inf\{\rho\,(y, t) \colon t \in F\} < \varepsilon\}$$

– ε-околом множини F [19].

Легко навести приклад ситуації, коли значення відхилення нескінчене. Можемо привести до прикладу й інші випадки, які говорять про те, що для того щоб за цією оцінкою стояла реальна геометрія, треба накласти деякі обмеження на множини, які розглядаються.

Позначимо через $\exp X$ множину всіх замкнених підмножин топологічного простору X, а через $\exp_c X$ – множину всіх бікомпактних замкнених підмножин простору X. Будемо розглядати відхилення α на множині $\exp_c X$ усіх компактних підмножин метричного простору X, тобто будемо вважати, що у написаній вище формулі F_1 і F_2, які лежать у просторі X – компакти. У цьому значені $\alpha\,(F_1, F_2)$ скінчене: сукупність $\{O_\varepsilon F_1 : \varepsilon > 0\}$ є відритим покриттям простору X, і в силу компактності множини F_2 із неї можна виділити скінчену підсукупність, яка покриває множину F_2. Ця підсукупність упорядкована відношенням включення (тобто з будь-яких двох його елементів один лежить в іншому), тому маємо максимальний елемент $O_\delta F_1$; очевидно, $\alpha\,(F_1, F_2) \le \delta$. Зазначимо інші властивості відхилення α [41]:

для довільних компактних підмножин F_1, F_2 і F_3 простору X:

1) $\alpha\,(F_1, F_2) \ge 0$,

2) $\alpha\ (F_1, F_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $F_2 = F_1$,

3) $\alpha\ (F_1, F_3) \leq \alpha\ (F_1, F_2) + \alpha\ (F_2, F_3)$. [42]

Доведення цих властивостей є простим. Деяких пояснень потребує лише третя властивість.

Нехай маємо довільне $\varepsilon > 0$ і множину F_2, яка лежить в $(\alpha\ (F_1, F_2) + \varepsilon)$-околі множини F_1, а множина F_3 – у $(\alpha\ (F_2, F_3) + \varepsilon)$-околі множини F_2. Згідно із результатами дослідження [1], із аксіоми трикутника випливає, що будь-яка точка множини F_3 віддалена від множини F_1 на відстань, меншу ніж $\delta = \alpha\ (F_1, F_2) + \varepsilon + +\alpha\ (F_2, F_3) + \varepsilon$ (тобто для довільної точки $x \in F_3$ знайдеться точка $y \in F_1$, для якої $\rho\ (x, y) < \delta$), і таким чином, $\alpha\ (F_1, F_3) \leq \alpha\ (F_1, F_2) + +\alpha\ (F_2, F_3) + 2\varepsilon$. Але так як це правильно при будь-якому $\varepsilon > 0$, то ми отримаємо 3) [1].

Відстаню Хаусдорфа між двома компактними підмножинами F_1 і F_2 метричного простору X називаємо таке число

$$\rho_H\ (F_1, F_2) = \max\ \{\alpha\ (F_1, F_2), \alpha\ (F_2, F_1)\}.$$

З-поміж вищеперерахованих властивостей відхилення немає властивості симетрії. Воно нею і не володіє, а тому не є метрикою. На відмінну від відхилення функції ρ_H симетрична, і з властивостей відхилення випливає, що вона є метрикою на множині $\exp_c X$.

Ми розглянули одну з можливих оцінок близькості множини: вона, з однієї сторони, має очевидну геометричну основу і, очевидно, виникає у цілому ряді задач, а з іншої – дає нам приклад частинного випадку фундаментальної математичної теорії – топології метричних просторів.

Метрика Хаусдорфа, яку ми ввели вище, залежить у своєму визначенні від початкової метрики простору X. Але, як ми вже відзначали, різні метрики на просторі X можуть породжувати одну і ту ж топологію. При цьому породжені ними метрики Хаусдорфа будуть відмінними, але залишається питання: чи будуть відрізнятися топології, які породжені цими відмінними метриками Хаусдорфа на множині $\exp_c X$? Відповідь негативна, тобто топологія простору $\exp_c X$ із метрикою Хаусдорфа залежить не безпосередньо від початкової метрики на просторі X, а від топології метричного простору X, і якщо ми змінюємо метрику на просторі X так, що не змінюється топологія простору X, то не змінюється і топологія простору $\exp_c X$ [46].

Ми опишемо прямий зв'язок між топологіями простору X і $\exp_c X$.

Нехай $\{U_1, \dots, U_n\}$ – довільна скінчена родина (непустих) відкритих підмножин топологічного простору X. Введемо позначення:

$$O\,\langle U_1, \dots, U_n\rangle = \left\{F\colon F \in \exp X\,, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\,, F \cap U_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap U_n \neq \emptyset\right\}$$

Множину виду $O\,\langle U_1, \dots, U_n\rangle$ будемо називати вьеторісовським околом (за відношенням до будь-якого його елементу). Підмножину U множини X будемо називати відкритою (у змісті В'єторіса), якщо для будь-якого його елемента F можна знайти такий його в'єторісовський окіл V, що

$$(F \in)V \subset U.$$

Можна перевірити, що множини, відкриті у змісті В'єторіса, задовольняють умовам 1), 2), і 3) і складають, таким чином, топологію на множині $\exp X$. Ця топологія називається топологією В'єторіса. Множина $\exp X$, яка взята з топологією В'єторіса, зазвичай називається простором замкнених підмножин (або гіперпростором) простору X. Вона позначається таким же символом $\exp X$. Множину $\exp_c X$ ми можемо розглядати в якості підпростору простору $\exp X$. Індукована на ньому топологія також називається топологією В'єторіса [23].

Побудова, яку ми провели, носить топологічний характер, і зокрема, якщо простір X – метричний, то топологія В'єторіса визначається не прямо на метриці, а за топологією простору X. Фундаментальним фактором є

Теорема 1.2.1. Нехай X – метричний простір. Тоді топологія В'єторіса простору $\exp_c X$ породжується метрикою Хаусдорфа [27].

З іншого боку, має місце

Теорема 1.2.2. Простір замкнених підмножин бікомпакта є бікомпактом.

У випадку, коли мова йде про (метричний) компакт, який співставляє ці дві теореми із зробленими раніше зауваженнями, отримуємо

Наслідок. Простір замкнених підмножин компакту є компактом.

1.3. Функтори експоненціального типу

Ми вже ввели простір $\exp X$ непустих замкнених підмножин простору X, який наділений топологією В'єторіса. Також був розглянутий його підпростір $\exp_c X$, який складається з бікомпактних підмножин X. У цьому розділі ми будемо вважати, що всі початкові простори – бікомпакти. Оскільки замкнена підмножина бікомпакту є бікомпактом, простори $\exp X$ і $\exp_c X$ для бікомпакту X співпадають. Цей простір будемо позначати через $\exp X$ і називати його гіперпростором або експонентою бікомпакта X.

Нехай $f: X \to Y$ – неперервне відображення. Для $C \in \exp X$ покладемо $(\exp f)(C) = f(C)$. Множина C як замкнена підмножина бікомпакту X сама є бікомпактом. Його неперервний образ $f(C)$ також бікомпактний. Але бікомпакт замкнений у всякому осяжному хаусдорфовому просторі [6].

Отже, $f(C)$ замкнений в Y, тобто $f(C) \in \exp Y$. Тим самим схарактеризоване відображення $\exp f: \exp X \to \exp Y$. Так, визначене відображення $\exp f$ неперервне. Це випливає з рівності, яке автоматично перевіряється

$$(\exp f)^{-1}(O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle) = O\,\langle f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\rangle.$$

Для будь-якого топологічного простору X покажимо через id_X тотожне відображення простору X на себе. Воно, явно, неперервне. Для довільних відображень $f: X \to Y$ і $g: Y \to Z$ через $g \circ f: X \to Z$ позначимо їх композицію, тобто результат послідовного виконання цих відображень. Так звана теорема про неперервность складної функції свідчить, що композиція неперервних відображень неперервна [41].

Операція exp, яка застосовується до бікомпактів та їх неперервних відображень, володіє наступними очевидними властивостями:

1) $\exp\,(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\exp\,X}$;
2) $\exp\,(g \circ f) = \exp \mathrm{g} \circ \exp f$ [15].

Таким чином, операція exp зіставляє кожному бікомпакту X бікомпакт $\exp X$, кожному неперервному відображенню $f: X \to Y$ неперервне відображення $\exp f : \exp X \to \exp Y$, і при цьому виконані умови 1) і 2) [41]. Це можна сформулювати по іншому: операція exp є (коваріантним) функтором, який діє на сукупність (або на категорії) Comp усіх бікомпактів і всіх їх неперервних відображень. Даний функтор має назву функтор експоненти або функтор гіперпростору замкнених множин.

Для бікомпакту X через $\exp^c X$ зазначимо множину зв’язних $A \in \exp \mathrm{X}$. Множина $\exp^c X$ є замкненою підмножиною експоненти $\exp \mathrm{X}$. Справді, візьмемо $A \in \exp X \setminus \exp^c X$. Множину A у силу її незв’язності можна представити у вигляді диз’юнктивної суми двох непустих замкнених підмножин A_1 і A_2. Але у бікомпакті із будь-яких двох замкнених множин, які не перетинаються, можна зробити околи, які не перетинаються. Візьмемо такі околи U_1 і U_2 множин A_1 і A_2. У результаті множина $O\,\langle U_1, U_2\rangle$ буде околом A в $\exp X$, яка не перетинається з $\exp^c X$, оскільки будь-який континуум, який лежить у сумі двох відкритих множин, що не перетинаються, повинен лежати в одному із доданків [7].

Отже, множина $\exp^c X$ замкнена у бікомпакті $\exp X$ і, тому сама є бікомпактом. Бікомпакт цей називається гіперпростором континуумів бікомпакту X або його континуальною експонентою. Припустимо, що $f: X \to Y$ – неперервне відображення. Позначимо через $\exp^c f$ обмеження відображення $\exp f : \exp X \to \exp Y$ на бікомпакт $\exp^c X$. Оскільки неперервний образ зв'язної множини зв'язний, відображення $\exp^c f$ переводить бікомпакт $\exp^c X$ у бікомпакт $\exp^c Y$. Також легко перевірити, що для континуальної експоненти виконуються умови функторіальності:

1) $\exp^c\ (\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\exp^c X}$;
2) $\exp^c\ (g \circ f) = \exp^c g \circ \exp^c f$.

Таким чином, операція $\exp^c$ є коваріантним функтором у категорії бікомпактів. Вона матиме назву функтор континуальної експоненти.

Оскільки для будь-якого бікомпакту X бікомпакт $\exp^c X$, звісно, укладений у бікомпакт $\exp \mathrm{X}$, а для будь-якого неперервного відображення $f: X \to Y$ комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \exp X & \xrightarrow{\exp f} & \exp Y \\ \cup & & \cup \\ \exp^{\mathrm{c}} X & \xrightarrow{\exp^{\mathrm{c}} f} & \exp^{\mathrm{c}} Y \end{array}$$

функтор континуальної експоненти $\exp^c$ є підфунктором функтора експоненти exp [29].

Через $\exp_n X$, для натурального n, позначимо множину всіх не більше ніж n-точкових підмножин X. Будь-яка скінчена підмножина хаусдорфового простору замкнена у ньому. Отже, $\exp_n X \subset \exp X$. Множина $\exp_n X$, яку розглядають як підпростір експоненти $\exp \mathrm{X}$, замкнена. Насправді, якщо $A \in \exp X \setminus \exp_n X$, то існує $n+1$ відмінних точок $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$. У цих точках, згідно хаусдорфовості простору X, знайдуться околи $U_1, \dots, U_{n+1}$, які попарно не перетинаються. Отже, множина $O = O\ \langle U_1, \dots, U_{n+1}, X\ \rangle$ є околом A в $\exp X$. У той же час будь-який елемент $B \in O$ повинен перетинатися з усіма U_i і, отже, повинен містити принаймні $n + 1$ точку. З цього випливає, що $O \cap \exp_n X = \emptyset$. Отже, множина $\exp_n X$ замкнена в $\exp X$, і тому, є бікомпактом [31].

Для неперервного відображення $f: X \to Y$, припускаючи, що $\exp_n f$ дорівнює обмеженню відображення $\exp f$ на бікомпакт $\exp_n X$, отримуємо неперервне відображення

$$\exp_n f \, : \, \exp_n X \to \exp_n Y.$$

Також зрозуміло, що операція $\exp_n$ задовольняє умовам 1) і 2) функторіальності і, отже, є коваріантним функтором. Цей функтом називається функтором гіперсиметричної n-степені. Функтор гіперсиметричної n-степені $\exp_n$ так само, як і функтом континуальної експоненти, є підфунктором функтора експоненти exp [45].

Особливий інтерес становить випадок, коли $n = 1$. Якщо ми не будемо розрізняти точки простору X і його одноточкові підмножини (що часто і робиться), то отримаємо природну тотожність множин X і $\exp_1 X$. Ототожнення це є гомеоморфізмом. Особливо легко побачити це у випадку метричного компакту X: відстань між точками x і y та одноточковими множинами $\{x\}$ і $\{y\}$ однакові. Але і у випадку, який не метризується, відображення топологічності

$$\{\cdot\} : X \to \exp_1 X$$

дуже легко перевіряється.

Таким чином, тотожній функтом Id, звичайно, ізоморфний функтору $\exp_1$ і, отже, є підфунктором експоненти. Більш того, має місце наступна діаграма включень, яка згадана тут, підфункторів експоненти:

$$\begin{array}{ccccc} \exp_2 \subset \cdots & & \subset \exp_{\mathrm{n}} & & \exp \\ \cup & & & & \cup \\ Id = \exp_1 & & \subset & & \exp^{\mathrm{c}} \end{array}$$

Поняття добутку топологічних просторів, яке ми ввели на початку розділу, є не тільки хорошим інструментом для конструювання нових топологічних об'єктів, але і дає цікаві методи дослідження топологічних просторів та їх неперервних відображень. Можливість представити даний простір X у вигляді добутку більш простих просторів і навіть у вигляді неперервного образу такого добутку найчастіше гарантує нам достатньо хороші властивості простору X. Але на даний час нас у першу чергу цікавлять функторіальні властивості добутку [44].

Для даного кардинального числа k (скінченого або нескінченого) операція піднесення простору у k-у степінь продовжується до коваріантного функтору у категорії топологічних просторів. Цей k-степенний функтор ми будемо позначати через Π^k, хоча простір $\Pi^k X$ і відображення $\Pi^k f$ найчастіше зручно позначати природними символами X^k і f^k. Відображення

$$f^k : X^k \to Y^k$$

визначається покоординатно: точці $x \in X^k$ із координатами x_α, $\alpha \in k$ ставлять у відповідність точку $f^k(x) = y$ з координатами $y_\alpha = f(x_\alpha)$.

Тотожній функтор, звичайно, ізоморфний підфунктору степеневого функтору Π^k для будь-якого k. Цей ізоморфізм здійснюється за допомогою вкладення простору X у його k-у степінь X^k, який ставить у відповідність точці $x \in X$ точку з X^k, усі координати якої дорівнюють x [44].

Тепер звузимося до випадку натуральних $k = n$ і бікомпактних X. Розглянемо відображення

$$\pi_n : X^n \to \exp_n X,$$

яке ставить у відповідність точці $x = (x_1, .., x_n) \in X^n$ множину її координат. Неважко переконатися у тому, що π_n є неперервним відображенням бікомпакту X^n на бікомпакт $\exp_n X$. Таким чином, гіперсиметрична n-степінь бікомпакту X є фактор-простір його n-ї степені відносно розбиття, який породжується наступним відношенням еквівалентності: точки $x, y \in X^n$ еквівалентні, якщо вони мають однакові множини координат. Цей факт з урахуванням того, що для будь-якого неперервного відображення $f : X \to Y$ комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{f^n} & Y^n \\ \pi_{nX} \downarrow & & \downarrow \pi_{nX} \\ \exp_{\mathrm{n}} X & \xrightarrow{\exp_{\mathrm{n}} f} & \exp_{\mathrm{n}} Y \end{array}$$

формулюється наступним чином: функтор $\exp_n$ гіперсиметричної n-степені є фактор-функтор функтору Π^n піднесення у n-у степінь.

Наведемо інші приклади фактор-функторів функтору Π^n. На n-й степені X^n бікомпакту X діє симетрична група S_n усіх перестановок як група перестановок координат. Множина орбіт цієї дії з фактор-топологією позначимо через $SP^n X$. Таким чином, точки простору $SP^n X$ – це скінченні підмножини (класи еквівалентності) добутку X^n. При цьому дві точки $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n) \in X^n$ вважаються еквівалентними, якщо існує така перестановка $\sigma \in S_n$, що $y_i = x_{\sigma(i)}$ [33].

Простір $SP^n X$ називається n-ю симетричною степеню простору X. Тепер ми можемо пояснити, чому $\exp_n X$ називається гіперсиметричною степеню простору X. Назвемо відношення еквівалентності, за допомогою яких простори $SP^n X$ і $\exp_n X$ отримуються з X^n відповідно відношеннями симетричної і гіперсиметричної еквівалентності. Будь-які симетрично еквівалентні точки із X^n будуть і гіперсиметрично еквівалентні. Зворотне, власне кажучи, неправильне. Так, для $x \neq y$ точки (x, x, y), $(x, y, y) \in X^3$ гіперсиметрично еквівалентні, але не еквіваленти симетрично. Отже, відношення гіперсиметричної еквівалентності сильніше відношення симетричної еквівалентності. Сильніше у тому розумінні, що його класи еквівалентності більші. Тому ці відношення називаються відношенням зверхсиметричної або гіперсиметричної еквівалентності, а відповідний йому простір $\exp_n X$ – гіперсиметричною степеню.

Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення. Для класу еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)] \in SP^n X$ покладемо

$$SP^n f\,[(x_1, \dots ,\ x_n)] = \left[\left(f(x_1), \dots, f(X_n)\right)\right].$$

Тим самим визначено відображення

$$SP^n f : SP^n X \to SP^n Y.$$

Його неперервність випливає із комутативності діаграми

$$\begin{array}{ccc} X^n & \xrightarrow{f^n} & Y^n \\ \pi^S_{nX} \downarrow & & \downarrow \pi^S_{nY} \\ SP^n X & \xrightarrow{SP^n f} & SP^n Y \end{array}$$

і факторності відображення π^s_{nX} і π^s_{nY}, яка визначається відношенням симетричної еквівалентності на X^n і Y^n [33].

Легко перевірити, що так побудована операція SP^n є коваріантом у категорії бікомпактів. Функтор цей називається функтором n-ї симетричної степені. Комутативність тільки що наведеної діаграми показує, що функтор SP^n є фактор-функтором функтору піднесення в n-у степінь [3].

Отже, функтор SP^n отримується за допомогою факторизації функтору Π^n. У свою чергу, факторизуючи функтор SP^n можна отримати функтор $\exp_n$. Насправді, клас симетричної еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)]$ однозначно визначає клас гіперсиметричної еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)]^{hs}$, який містить його. Тим самим визначено відображення

$$\pi^h_n : SP^n X \to \exp_n X,$$

яке представляє функтор $\exp_n$ в якості фактор-функтору фунтору SP^n. Також зрозуміло, що для будь-якого бікомпакту комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc} X^n & & \xrightarrow{\pi_n} & & \exp_n X \\ \pi^s_n \downarrow & & & & \uparrow \pi^h_n \\ & \to & SP^n X & \to & \end{array}$$

Поняття симетричної степені припускає узагальнення. Нехай G – довільна підгрупа групи S_n. Тоді вона також діє на X^n як група перестановок координат. Відповідно на X^n виникає відношення G-симетричної еквівалентності. Фактор-простір добутку X^n за відношенням G-симетричної еквівалентності називається G-симетричною степеню простору X і позначається через $SP_G^n X$. Операція SP_G^n також є коваріантним функтором у категорії бікомпактів, який називають функтором G-симетричної степені. Якщо G, то $SP_G^n = SP^n$. Якщо ж група G складається тільки з одиничного елементу, то $SP_G^n = \Pi^n$. Більш того, якщо G_1, G_2 – такі підгрупи симетричної групи S_n, що $G_1 \subset G_2$, то виникає наступна послідовність, яка природно визначається, факторизацій функторів:

$$\Pi^n \to SP_{G_1}^n \to SP_{G_2}^n \to SP^n \text{ [5].}$$

РОЗДІЛ 2
ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ З ТЕОРІЇ МНОГОВИДІВ

2.1. Аналіз наукової психолого-педагогічної та методологічної літератури з проблеми дослідження

Топологія, яка зародилася у надрах дійсного і комплексного аналізу наприкінці XIX століття, є великою дисципліною, яка складається із декількох великих розділів із різносторонніми зв'язками між ними і іншими математичними дисциплінами, а також численних додатків, які є як всередині математики, так і за її межами [43].

У наш час кожний математик (як і фізик-теоретик) повинен володіти мінімальною топологічною підготовкою незалежно від його вузької спеціальності.

Другий основний предмет нашої роботи, ріманова геометрія, або теорія ріманових многовидів. Основи цієї теорії були закладені Ріманом ще у 1846 році. Тензорний аналіз, який виник на рубежі XIX і XX століть у роботах Річчі і Леві-Чівіти, виявився найбільш відповідним аналітичним апаратом для ріманової геометрії. Також основоположником ріманової геометрії вважають і Ейншейна, оскільки загальна теорія відносності, яка була ним створена, з математичної точки зору є деким різновидом ріманової геометрії (а саме псевдоріманових або лоренцевих многовидів). Загальна теорія справила великий вплив на розвиток ріманової геометрії [43].

Деякі автори уникають логічних труднощів, з самого початку обмежуються розглядом підмноговидів евклідового простору. Наприклад, це можна спостерігати у книзі «Топология с дифференциальной точки зрения» Дж. Милнора. Такий підхід не зменшує степені загальності, оскільки згідно теореми Уітні, будь-який многовид можна вкласти в евклідовий простір. Визначення гладкого многовиду стає набагато простішим при такому підході, але надалі виникають інші логічні труднощі такого ж характеру. Проте серед топологів існує думка, що якщо якесь питання порушено в одній з книг або статтей Мілнора, то кращого викладу цього питання не знайти.

Роль гладких многовидів у сучасній математиці двояка. З однієї сторони, многовид є найбільш адекватним апаратом для глобального вивчення багатьох нелінійних задач. Тут доречно згадати цитату з книги М. Морса «Вариационное исчисление в целом»: «Классический анализ применяется при решении нелинейных задач как средство предварительного локального изучения, последующая глобализация производится с помощью топологии или теории групп» [30]. А з іншої сторони, гладкі многовид самі є об'єктом вивчення у диференціальній топології. Однією з основних задач є проблема класифікації, яка до цього часу до кінця не вирішена.

Тривимірна топологія і чотиривимірна топологія є двома великими розділами диференціальної топології, які у наш час інтенсивно розвиваються і знаходять нові важливі додатки у теоретичній фізиці.

Вочевидь, М. Морс першим звернув увагу на глибокі зв'язки, які існують між топологією многовид, кількістю, і характером критичних точок гладкої дійсної функції та які визначені на цьому многовид. Основні роботи Морса опубліковані в 20-ті роки XX століття. Зараз цей розділ диференціальної топології прийнято називати теорією Морса. Морс формулював свої основні результати у вигляді деяких нерівностей (нерівності Морса), які пов'язують числа Бетті многовиду, який розглядають, з кількістю критичних точок відмінних індексів гладкої функції, визначеної на цьому многовид, при умові, що всі критичні точки не вироджені. Числа Бетті є одним з понять алгебраїчної топології

У 1904 році А. Пуанкаре сформував наступне питання: «Чи правильно, що компактний однозв'язний n-вимірний многовид гомеоморфний сфері S^n, якщо він має ті ж групи гомології, що і

S^n?» [43]. Сам Пуанкаре знав відповідь лише у двовимірному випадку. На початку 60-х років минулого століття гіпотеза була доведена у вимірах ≥ 5. Це відбулося у результаті розвитку теорії Морса. Таким чином, гіпотеза Пуанкаре залишалася відкритою у вимірах 3 і 4. Прорив у чотиривимірній топології виник у середині 80-х років у значній мірі завдяки ідеям, які прийшли з квантової механіки (поля Янга – Міллса). Зокрема, була доведена чотиривимірна гіпотеза Пуанкаре. Тривимірний випадок виявився найважчим. Зазначимо, що тривимірна гіпотеза Пуанкаре може бути сформована без згадування гомології: «Чи правда, що компактний однозв'язний тривимірний многовид гомеоморфний (= диффеоморфний) сфері S^3?» [43]. Відомо декілька підходів до цієї проблеми, які часом приводили до цікавих побічних результатів, але не до доведення гіпотези. Зокрема, Р. Гамільтон у середині 80-х років запропонував підхід, який заснований на використанні так званого потоку Річчі. Сам Гамільтон на цьому шляху довів тривимірну гіпотезу Пуанкаре лише у досить частковому випадку. Повністю підхід Гамільтона був реалізований Г. Я. Перельманом, який опублікував доведення тривимірної гіпотези Пуанкаре у 2004 році. Фактично Перельман довів геометризаціону гіпотезу Терстона, яка значно більш загальна, ніж тривимірна гіпотеза Пуанкаре. У доведенні Перельмана найбільшого враження справляє різноманіття методів, які застосовує та які Перельман підсилює і розвиває. Так він успішно використовує зовсім недавно створену теорію нелінійних параболічних рівнянь. Крім того, Перельман застосовує різноманітні результати і методи ріманової геометрії, а також методи нерегулярної геометрії. Останній напрям у геометрії, який на Заході часто називають російською геометрією, був закладений у роботах А. Д. Александрова, який є основоположником кафедри геометрії і топології в НДУ [18].

2.2. Визначення ріманового многовиду

Ріманова метрика на гладкому многовиді M називається гладке коваріантне тензорне поле $g \in T_2^0(M)$ валентності $(0, 2)$, яке симетричне, $g(X, Y) = g(Y, X)$, і додатно визначена на всіх точках, тобто $g_p(X, X) > 0$ для будь-якої точки $p \in M$ і для будь-якого вектора $0 \neq X \in T_p M$. Многовид разом із зафіксованою на ній рімановою метрикою називається рімановим многовидом. Рімановий многовид зазвичай позначають (M, g). Іноді це позначення скорочують до M, якщо зрозуміло з контексту про яку метрику йде мова. Саме тензорне поле g зазвичай називають метричним тензором [44].

У локальних координатах метричний тензор має такий вигляд:

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \,, \tag{2.2.1}$$

де $g_{ij} = g_{ij}\,(x^1, \dots, x^n)$ – гладкі функції, які задані в області визначення локальної системи координат, причому матриця $\left(g_{ij}\right)$ симетрична і додатно визначена. Раніше формула (2.2.1) записувалася у вигляді:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j, \tag{2.2.2}$$

де ds інтерпретувалось як диференціал відстані між близькими точками $(x^1, \dots, x^n)$ і $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$. При замінні координат функції g_{ij} перетворюються за правилом перетворення координат тензорного поля валентності $(0, 2)$:

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j} g_{k\ell}. \tag{2.2.3}$$

Додатно визначена матриця (g_{ij}) обернена. Позначимо обернену матрицю через (g^{ij}). Ця матриця також симетрична і, як легко випливає з (2.2.3), її компоненти перетворюються при замінні координат за формулою

$$g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell} g^{k\ell}. \tag{2.2.4}$$

Це означає, що g^{-1} є контраваріантним тензорним полем, тобто $g^{-1} \in T_0^2(M)$ [8].

Метричний тензор визначає скалярний добуток в дотичному просторі T_pM для кожної точки $p \in M$. Ми будемо позначати цей скалярний добуток через $\langle X, Y \rangle_g = g(X, Y)$, часто скорочуючи його до $\langle X, Y \rangle$. Таким чином,

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle X, Y \rangle = g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j \text{ для } X, Y \in T_pM.$$

Скалярний добуток визначає норму вектора $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ і кут між векторами $\cos\varphi = \langle Z, Y \rangle / \, \|X\| \|Y\|$ для $X, Y \in T_pM$. Зауважимо також, що для двох гладких векторних полів $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ скалярний добуток $\langle X, Y \rangle$є гладкою функцією на M.

Скалярний добуток визначає канонічний ізоморфізм між простором T_pM і спряженим простором $T_p^{'}M$ для кожної точки $p \in M$. Дійсно, для фіксованого вектора $X \in T_pM$ відображення $T_pM \to R, Y \to$ $\to \langle X, Y \rangle$ є лінійним функціоналом, тобто елементом простору $T_p^{'}M$. Таким чином, будь-який вектор може одночасно розглядатися як ковектор. Ми будемо розглядати цей ізоморфізм як тотожність, тобто

$$T_pM = T_p^{'}M.$$

У координатах ця тотожність виражається формулою

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X_i dx^i,$$

де

$$X_i = g_{ij} X^j, X^i = g^{ij} X_j. \tag{2.2.5}$$

Таким чином, ми перестаємо розрізняти вектори і ковектори, а замість цього кажемо про коваріантні і контраваріантні координати вектора [14].

Ототожнення векторів і ковекторів потім розповсюджується на тензори і тензорні поля:

$$T_s^r(M) = T_0^{r+s}(M) = T_{t+s}^0(M).$$

Ми не розрізняємо коваріантні і контраваріантні тензори, а замість цього кажемо про коваріантні і контраваріантні координати одного і того ж тензора. Наприклад, для тензора другої валентності в координатах

$$T^{ij} = g^{ik} g^{j\ell} T_{k\ell}, T_{ij} = g_{ik} g_{j\ell} T^{k\ell} . \qquad (2.2.6)$$

Можна також використовувати змішані координати двох сортів того ж тензора:

$$T_j^i = g^{ik} T_{kj} , \qquad (2.2.7)$$

$$T_i^j = g^{jk} T_{ik}$$

Операції (2.1.5) – (5.1.7) називаються підняттям і опусканням індексів тензора [43].

Щоб впевнитися, що на кожному многовиді існує ріманова метрика, скористаємося теоремою Уітні. Спочатку згадаємо, що евклідова метрика e на R^N задається у декартових координатах формулою

$$\langle X, Y \rangle_e = \sum_{\alpha=1}^{N} X^\alpha Y^\alpha \text{ для } X, Y \in T_p R^N = R^N.$$

Згідно теореми, яка звучить так: будь-який многовид можна вкласти в евклідовий простір достатньо великої розмірності. Нехай $r : M \to R^N$ – таке вкладення. Тоді ми можемо визначити ріманову метрику на M формулою

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle \big(d_p r\big)(X), (d_p r)(Y) \rangle_e \text{ для } X, Y \in T_p M,$$

де $d_p r: T_p M \to R^N$ – диференціал вкладення r. Кажуть, що визначена таким чином ріманова метрика g на M індукована евклідовою метрикою e за допомогою вкладення r. У локальних координатах ця метрика задається формулою

$$g_{ij} = \sum_{\alpha 1=}^{N} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^j},$$

якщо

$$r = \big(r^1(x^1, \dots, x^n), \dots\ r^N\ (x^1, \dots, x^n)\big). \qquad (2.2.8)$$

Формула (2.2.8) встановлює також зв'язок між рімановою геометрією і диференціальною геометрією. Дійсно, позначити по-іншому при $n = 2$ і $N = 3$

$$u = x^1, v = x^2; E = g_{11}, F = g_{12}, G = g_{22},$$

ми можемо переписати (2.2.2) у вигляді

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2, \tag{2.2.9}$$

де, згідно (2.1.8),

$$E = \langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \rangle_e, F = \langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \rangle_e, G = \langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \rangle_e \tag{2.2.10}$$

Формули (2.2.9) і (2.2.10) є визначенням першої квадратичної поверхні у позначеннях Гауса. Нагадаємо, що внутрішньою геометрією поверхонь називається та частина диференціальної геометрії, яка вивчає ті властивості поверхні, які залежать лише від її першої квадратичної форми. Таким чином, метричний тензор є багатовимірним узагальненням першої квадратичної форми поверхні, а ріманова геометрія може розглядатися як багатовимірний аналог внутрішньої геометрії поверхонь [26].

Нехай (M, g) і $(M^{'}, g^{'})$ – два ріманових многовида. Кажемо, що гладке відображення $\varphi: M \to M^{'}$ зберігає ріманову метрику, якщо для будь-якої точки $p \in M$

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle d_p\varphi(X), d_p\varphi(Y) \rangle_{g'} \text{ для } X, Y \in T_pM,$$

де $d_p\varphi: T_pM \to T_{\varphi(p)}M^{'}$ – диференціал відображення φ. Якщо, додатково, це відображення бієктивне, то кажемо, що φ – ізометрія ріманових многовидів.

Нехай (M, g) – рімановий многовид. Кажемо, що зв'язність ∇ на M сумісна з метрикою, якщо паралельне перенесення відносно цієї зв'язності зберігає скалярний добуток, тобто якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – паралельні вздовж кривої $\gamma(t)$ векторні поля, то скалярний добуток $\langle X(t), Y(t) \rangle$ незмінний [16].

Лема. Нехай зв'язність ∇ сумісна з метрикою. Якщо $X(t)$ і $Y(t)$ – векторні поля вздовж кривої $\gamma(t)$, то

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{DY}{dt}\rangle. \qquad (2.2.11)$$

Наслідок. Для будь-яких трьох векторних полів $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ справедлива рівність

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Теорема. На рімановому многовиді існує єдина симетрична зв'язність, яка сумісна з метрикою.

Зв'язність, існування та єдність, про які говориться в даній теоремі, іноді називають рімановою зв'язністю, щоб підкреслити, що вона визначається рімановою метрикою. Але частіше її називають зв'язністю Леви-Чівіти [43].

2.3. Експоненціальне відображення

Нехай (M, g) – рімановий многовид. Довжиною кривої $\gamma : [a, b] \to M$ називається

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

або в координатах

$$L(\gamma) = \int_a^b (g_{ij}(\gamma(t)\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t))^{1/2} dt.$$

Для існування цього інтегралу достатньо, щоб γ була кривою класу C^1 (або неперервною і кусково-диференційовною кривою). Довжиною дуги кривої називається функція $s(t) = L\left(\gamma|_{[t_0, t]}\right) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$.

Кажемо, що крива параметризована довжиною дуги або природно параметризована, якщо $s(t) = t + const$. Рівність $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ необхідна і достатня для того, щоб крива була природно параметризована [38].

Вважаючи многовид M зв'язним, припускаємо для $p, q \in M$

$$\rho(p, q) = \inf L(\gamma), \qquad (2.3.1)$$

де точна нижня границя береться за всіма гладкими кривими $\gamma: [a, b] \to M$, які сполучають точки p і q, тобто $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Легко впевнитися, що так визначена функція $\rho: M \times M \to R$ задовольняє аксіоми відстані, так що (M, ρ) стає метричним простором [33].

Нехай (M, g) – рімановий многовид. Гладка параметризована крива $\gamma: (a, b) \to M$ називається геодезичною, якщо її вектор прискорення тотожно дорівнює нулю, тобто

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0. \qquad (2.3.2)$$

Користуючись правилом (2.2.11) диференціювання скалярного добутку отримаємо з (2.3.2)

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{d}{dt}\langle\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 2\left\langle\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}\right\rangle = 0,$$

тобто $\|\dot{\gamma}(t)\| = const$. Таким чином, параметр t геодезичної $\gamma(t)$ пропорційний довжині дуги.

Рівняння (2.3.2) у координатах має такий вигляд:

$$\ddot{\gamma}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k = 0 \ (1 \le i \le n)\,. \qquad (2.3.3)$$

Зауважимо, що це – система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, причому рівняння нелінійні, оскільки другий доданок квадратично по $\dot{\gamma}$. Початкові умови для такої системи мають такий вигляд:

$$\gamma^i(0) = x^i_0, \dot{\gamma}^i(0) = X^i_0 \ (1 \le i \le n)$$

або

$$\gamma(0) = p \in M, \dot{\gamma}(0) = X \in T_pM. \ (2.3.4)$$

Як доводиться в теорії звичайних диференціальних рівнянь, розв’язання задачі Коші (2.3.3) – (2.3.4) існує при малих $|t|$ і єдине. Зазвичай кажуть так: із будь-якої точки у будь-якому напрямі виходить єдина геодезична. Більш точно: для будь-якої точки $(p_0, X_0) \in TM$ знайдеться окіл $W \subset TM$ цієї точки і число $\varepsilon > 0$, такі, що для $(p, X) \in W$ розв’язання задачі існує і єдине при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Більш зручним є наступне твердження:

Лема 2.3.1. Для кожної точки p_0 ріманового многовиду M існує такий окіл U точки p_0 і таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $p \in U$ і будь-якого вектора $X \in T_p M$, який задовольняє $\|X\| < \varepsilon$, існує єдина геодезична

$$\gamma_{p,X}: (-2,2) \to M,$$

яка задовольняє початковим умовам

$$\gamma_{p,X}(0) = p, \dot{\gamma}_{p,X}(0) = X. \text{ [19]}$$

Доведення. Згідно твердження, яке згадували перед лемою, можна знайти окіл U точки p_0 і додатні числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, такі що для кожної точки $p \in U$ і кожного $X \in T_p M$, який задовольняє $\|X\| < \varepsilon_1$, існує єдина геодезична

$$\gamma_{p,X}: (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \to M,$$

яка задовольняє необхідним початковим умовам.

Щоб отримати звідси твердження леми, достатньо помітити, що рівняння геодезичних (2.3.2) має наступні властивості однорідності: якщо параметризована крива $t \longmapsto \gamma(t)$ є геодезичною, то крива $t \longmapsto \gamma(ct)$ також є геодезичною для будь-якої константи c [4].

Нехай тепер $\varepsilon < \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Тоді, якщо $\|X\| < \varepsilon$ і $|t| < 2$, то

$$\|X/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1 \text{ і } |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

Тому ми можемо визначити $\gamma_{p,X}(t)$ як $\gamma_{p,X/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$.

Доведено

Зручно ввести наступне позначення. Нехай вектор $X \in T_p M$ такий, що існує геодезична

$$\gamma: [0,1] \to M,$$

яка задовольняє початкові умови

$$\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = X.$$

Тоді вважаємо

$$\exp_{\mathrm{p}}(X) = \gamma(1).$$

Точка $\exp_{\mathrm{p}}(X)$ називається експонентою вектора X. Сама геодезична γ може бути записана у вигляді

$$\gamma(t) = \exp_{\mathrm{p}}(tX).$$

Згідно леми 2.3.1, $\exp_{\mathrm{p}}(X)$ визначена для достатньо малих $\|X\|$. Узагалі кажучи, $\exp_{\mathrm{p}}(X)$ не визначена при великих X. Але якщо $\exp_{\mathrm{p}}(X)$ визначена, то обов'язково однозначно [9].

Позначимо через $B_\varepsilon = \{X \in T_pM \mid \|X\| < \varepsilon\} \subset T_pM$ відкриту кулю радіуса ε з центром у нулі. Експоненціальне відображення

$$\exp_{\mathrm{p}}: B_\varepsilon \to M \tag{2.3.5}$$

визначено при достатньо малому $\varepsilon > 0$. Гладкість цього відображення випливає з того, що розв'язання задачі Коші гладко залежить від початкових даних. Зауважимо, що диференціал цього відображення у нулі

$$d_0 \exp_{\mathrm{p}}: T_pM \to T_pM$$

є тотожним відображенням.

Щоб довести це твердження, зауважимо спочатку, що для довільного гладкого відображення $f: M \to N$ диференціал $d_qf: T_qM \to T_{f(q)}N$ можна описати наступним чином. Якщо $\gamma: (-a, a) \to M$ – крива, для якої $\gamma(0) = q$ і $\delta = f \circ \gamma : (-a, a) \to N$, то $(d_pf)(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\delta}(0)$.

Застосуємо це правило до відображення $T_pM \supset B_\varepsilon \xrightarrow{\exp_{\mathrm{p}}} M$, вважаючи у попередньому реченні $q = 0 \in T_pM$. Для $X \in T_pM = T_0(T_pM)$ визначаємо криву $\gamma : (-a, a) \to T_pM$, вважаючи $\gamma(t) = tX$. Тоді $\delta(t) = (\exp_{\mathrm{p}} \circ \gamma)(t) = \exp_{\mathrm{p}}(tX)$. Отже,

$$(d_0 \exp_{\mathrm{p}})(X) = \dot{\delta}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp_{\mathrm{p}}(tX) = X.$$

То ж диференціал відображення (2.3.5) у точці $0 \in T_pM$ невироджений. Згідно теореми про обернену функцію, для деякого

$0 < \varepsilon^{'} \leq \varepsilon$ відображення $\exp_p$ відображає шар $B_{\varepsilon'}$ диффеоморфно на деякий окіл $U \subset M$ точки p [16].

Крім задачі Коші, для рівняння другого порядку часто розглядають таку задачу: знайти розв'язок рівняння, який приймає задані значення у двох відмінних точках. У застосуванні до геодезичних ця задача звучить так: знайти геодезичну, яка сполучає дві точки $p, q \in M$. У загальному випадку ця задача може не мати розв'язків, а може мати безліч розв'язків. Але локальний варіант цієї задачі завжди має єдиний розв'язок, як показує наступна

Теорема 2.3.1. Для кожної точки p_0 ріманового многовиду M існує окіл W і число $\varepsilon > 0$, такі, що

1) будь-які дві точки з W сполучає одна і тільки одна геодезична довжини менше ε;

2) ця геодезична гладко залежить від своїх кінців, тобто якщо $t \longmapsto \exp_{p_1}(tX)$ $(0 \leq t \leq 1)$ – геодезична, яка сполучає p_1 і p_2, то пара $(p_1, X) \in TM$ гладко залежить від пари $(p_1, p_2) \in W \times W$;

3) для кожної точки $p \in W$ відображення $\exp_p$ відображає кулю $B_\varepsilon = \{X \in T_pM \mid \|X\| < \varepsilon\}$ диффеоморфно на відкриту множину $U_p \supset W$ [16].

Доведення. Розглянемо гладке відображення

$$E : V \to M \times M, E(p, X) = \left(p, \exp_p(X)\right).$$

Диференціал $d_{(p_0,0)}E$ відображення E у точці $(p_0, 0)$ невироджений. Насправді, нехай $(U;\, x^1, \dots, x^n)$ локальна система координат на M, визначення в околі U точки p_0. Нехай $(x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n)$ – відповідні координати в $U \times U \subset M \times M$, а $(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n)$– індуковані координати в $\pi^{-1}(U) \subset TM$. Матриця Якоби відображення E в обраних координатах має вигляд

$$d_{(p_0,0)}E = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

де I – одинична $n \times n$-матриця. Єдиним неочевидним місцем тут є правий нижній блок цієї матриці. Але цей блок співпадає з матрицею Якоби диференціала $d_0 \exp_{\mathrm{p}_0}$, який є тотожним відображенням простору $T_{p_0}M$ [45].

За теоремою про обернену функцію E відображає деякий окіл V' точки $(p_0, 0) \in TM$ диффеоморфно на окіл точки $(p_0, p_0) \in M \times M$. Можна вважати, що V' складається з тих (p, X), що $p \in U'$ і $\|X\| < \varepsilon$. Оберемо менший окіл W точки p_0 так, що $E(V') \supset W \times W$. Для цих W і ε справедливі всі твердження теореми.

Доведено

Розглянемо два найпростіші приклади.

Евклідова метрика e на R^n визначається у декартових координатах рівністю

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} X^i Y^i \text{ для } X, Y \in T_p R^n = R^n.$$

Координати метричного тензора у декартовій системі координат (а також в афінній системі координат) сталі і, отже, символи Кристофеля тотожно дорівнюють нулю. Рівняння геодезичних (2.3.3) набувають вигляду

$$\ddot{\gamma}^i = 0.$$

Розв’язок цієї системи є очевидним: $\gamma(t) = At + B$ зі сталими $A, B \in R^n$. Іншими словами: геодезичні евклідового простору – прямі. Тому можна сказати, що поняття геодезичної у рімановому многовиді є аналогом поняття прямої в евклідовому просторі.

У рімановому многовиді (R^n, e) будь-які дві точки сполучаються єдиною геодезичною. Якщо ж ми викинемо з R^n одну точку, то для отриманого рімановий многовид перестане бути справедливим твердженням: для будь-яких двох точок існує геодезична, яка їх сполучає [43].

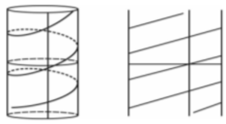

Рисунок 2.3.1 – Прямий круговий циліндр

У якості другого прикладу розглянемо прямий круговий циліндр $\{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 = 1\} \subset R^3$ з індукованою з R^3 метрикою (див. рис. 2.3.1). Ми стверджуємо, що геодезичними на циліндрі є три родини ліній: 1) прямолінійні вертикальні твірні; 2) кола, які отримуються при перетині циліндра горизонтальними площинами; 3) гвинтові лінії. Щоб впевнитися у цьому, розріжемо циліндр за однією з вертикальних твірних і розвернемо на смужку $\Pi = \{(x, z)| -\pi \leq x \leq$ $\leq \pi\} \subset R^2$. Очевидно, що при цьому метрика циліндра перейде в евклідову метрику, а кожна геодезична циліндра перейде в пряму, можливо розділену на шматки лінією розрізу. Зворотно, циліндр отримується зі смужки П склеюванням вертикальних сторін, при цьому прямі переходять у лінії трьох вказаних родин. Зауважимо, що на циліндрі кожні дві точки сполучаються нескінченим числом геодезичних [7].

РОЗДІЛ 3
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ДОСЛІДНА РОБОТА

3.1. Наукові основи вивчення функції експоненціального виду в школі

Показникова функція та ізоморфні відображення групи $(R;\ +)$ *на групу* $(R_+;\ \cdot)$

Відбір операцій, відносно яких замкнена множина елементарних функцій, не може бути сумнівним. Оскільки операції додавання та множення відносяться до основних алгебраїчних операцій в R, зрозуміло, що сума і добуток елементарних функцій повинні належати тій же множині. Композиція функцій також належить числу основних операцій, так як для елементарних функцій вона зводиться до підстановки деякого виразу замість аргументу x. Не входить операція переходу до зворотної функції. Справа у тому, що, з однієї сторони, зворотні функції існують не для всіх елементарних функцій (оскільки не всі елементарні функції ін'єктивні), а з іншої сторони, функції, зворотні елементарним, можуть виявитися надмірно складними. Наприклад, навіть функція, зворотна многочлену, взагалі кажучи, не виражається через x і числа за допомогою операцій додавання, множення, ділення і вилучення кореня. Функції, зворотні многочленам, належать до класу алгебраїчних функцій, тобто функцій, які неявно задані деяким многочленом від двох змінних. Іншими словами, функція f алгебраїчна, якщо існує такий многочлен $P(x, y)$, що $P\big(x, f(x)\big) = 0$. Дослідження алгебраїчних функцій потребує залучення методів теорії функцій комплексної змінної, топології, алгебраїчної геометрії і не відноситься до елементарної математики. Перехід від даної функції до зворотної використаний лише при складанні множини базисних функцій [16].

Розглянемо тепер, як складена множина базисних функцій. Існування у ній постійно функції C, так само як і функції x, не викликає сумнівів (такі функції є не тільки на числових, але і на будь-яких множинах).

Визначимо тепер причину включення у список базисних функцій показникової функції e^x. Функцію a^x, де $a > 0$, $a \neq 1$, можна визначити наступним чином:

Показниковою функцією з основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають таку функцію f, що

а) $D(f) = R, E(f) = R_+$,

б) функція f неперервна для всіх $x \in R$,

в) для будь-яких x_1 і x_2 з R виконується рівність

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \qquad (3.1.1)$$

г) має місце рівність $f(1) = a$.

Замість $f(x)$ пишуть a^x.

Це визначення можна сформулювати по-іншому. Функція $f: x \to a^x$ є відображенням множини R на множину R_+ причому рівність (3.1.1) показує, що f перетворить операцію додавання у множині R в операцію множення в R_+. Іншими словами, $f: x \to a^x$ є неперервним гомеоморфним відображенням групи $(R;\ +)$ на групу $(R_+; \cdot)$, таким, що $f(1) = a$. Далі покажемо, що це відображення бієктивне, а тому є ізоморфним відображенням $(R;\ +)$ на $(R_+; \cdot)$ [16].

Коли який-небудь математичний об’єкт (число, множина, відображення і т. д.) визначений шляхом зазначення його властивостей, виникає два основні питання: чи існує об’єкт, який має властивості, що вимагають , і чи однозначно він визначається цими властивостями?

Таким чином, треба відповісти на такі питання:

а) існує хоча б одна функція, яка має властивості а) – г) з визначення 1?

б) чи однозначно визначають ці властивості функцію a^x?

Далі ми зможемо побачити, що відповідь на обидва запитання позитивна. Іншими слова, справедлива наступна теорема:

Теорема 3.1.1. Нехай $a > 0$ і $a \neq 1$. Тоді існує одне і тільки одне неперервне гомеоморфне відображення групи $(R; +)$ на групу $(R_+; \cdot)$, таке, що $f(1) = a$ [19].

Доведення. Доведемо спочатку єдність шуканого відображення. Припустимо, що існує відображення f з властивостями, які вимагають. За допомогою метода математичної індукції доводиться, що тоді для будь-яких дійсних чисел $x_1, \dots, x_n$ маємо

$$f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) \dots f(x_n).$$

Зокрема, для будь-якого натурального числа n отримуємо, що

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) \dots f(1) = a^n.$$

Далі, нехай r – додатне раціональне число, $r = \frac{m}{n}$. Так як $nr = m$ і $f(nr) = [f(r)]^n$, то $[f(r)]^n = f(m) = a^m$. Оскільки за умовою $f(r) > 0$, то ця рівність однозначно визначає значення $f(r)$: $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}$. Якщо $a > 1$, то і $f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m} > 1$, а якщо $0 < a < 1$, то і $0 < f(r) = f\left(\frac{m}{n}\right) < 1$. Приймаючи до уваги, що $a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1}$, виводимо, що якщо $a > 1$, то при $r_2 > r_1$ маємо $a^{r_2} > a^{r_1}$, а якщо $0 < a < 1$, то при $r_2 > r_1$ маємо $a^{r_2} < a^{r_1}$.

Нехай тепер x – додатне ірраціональне число, і нехай (r_n) – послідовність раціональних чисел, яка збігається до x, $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Так як функція f за умовою неперервна, то звідси повинно випливати, що $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n)$. Отже, функція f однозначно визначена для всіх додатних значень x [19].

Залишилося відмітити, що для будь-якого x маємо $f(x + 0) = f(x) \cdot f(0)$ і тому $f(0) = 1$, а

$$f(x)f(-x) = f(x - x) = f(0) = 1$$

і тому $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

Ми довели, що якщо функція f з необхідними властивостями існує, то її значення при будь-якому значенні аргументу однозначно визначено.

Перейдемо тепер до доведення існування показникової функції. Для цього скористаємося теорією рядів. Покладемо

$$\varphi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{3.1.2}$$

і покажемо, що функція φ задовольняє умовам а) – в) теореми, яку доводять.

Так як

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = 0,$$

то ряд (3.1.2) абсолютно збігається при всіх значеннях x. При цьому якщо $x > 0$, то сума ряду більша 1 і тому додатна. Оскільки сума степеневого ряду неперервна в області збіжності, то функція φ неперервна для всіх значень x. Доведемо, що при будь-яких s і t виконується рівність $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$. У силу теореми про множення абсолютно збіжних рядів маємо

$$\varphi(x) \cdot \varphi(t) = \left(1 + s + \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{s^n}{n!} + \cdots\right) \times$$

$$\times \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + (s+t) + \left(\frac{s^2}{2!} + st + \frac{t^2}{2!}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{s^n}{n!} + \cdots + \frac{1}{k!\,(n-k)!} s^{n-k} t^k + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) + \cdots$$

$$= 1 + (s+t) + \frac{1}{2!}(s^2 + 2st + t^2) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(s^n + \cdots + C_n^k s^{n-k} t^k + \cdots + t^n) + \cdots$$

Але за формулою бінома Ньютона

$$s^n + \cdots + C_n^k s^{n-k} t^k + \cdots + t^n = (s+t)^n$$

і тому

$$\varphi(s)\varphi(t) = 1 + (s+t) + \frac{(s+t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(s+t)^n}{n!} + \cdots = \varphi(s+t).$$

Тим самим доведено виконання рівності (3.1.2).

Із (3.1.2) випливає, що при $x > 0$ маємо $\varphi(-x)\varphi(x) = 1$, тобто $\varphi(-x) = \frac{1}{\varphi(x)}$, тому функція φ додатна при всіх значеннях x.

Нам залишилося довести, що $E(\varphi) = R_+$, тобто що функція φ приймає будь-які додатні значення. Для цього замінимо, що $\varphi(n) = 1 + n + \cdots > n$. З іншої сторони, $\varphi(-n) = \frac{1}{\varphi(n)} < \frac{1}{n}$.

Отже, функція φ приймає які завгодно великі, так і які завгодно малі додатні значення. Оберемо тепер будь-яке додатне число y_0. Знайдеться таке n, що $\frac{1}{n} < y_0 < n$. Так як функція φ неперервна, то за теоремою про проміжне значення знайдеться таке x_0, що

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Отже, $E(\varphi) = R_+$.

Таким чином, функція φ задовольняє вимогам а) – в) теореми 3.1.1. Тому вона є показниковою функцією з основою $\varphi(1)$. Ця основа (тобто суму числового ряду $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$) позначимо e, тоді

$$\varphi(x) = e^x.$$

Отже, доведено існування показникової функції з основою e. Очевидно, що функція e^{kx} при $k \neq 0$ також задовольняє умовам а) – в) теореми і тому є показниковою функцією з основою $a = e^k$. Але для будь-якого $a > 0$, $a \neq 1$ знайдеться таке $k \neq 0$, що $e^k = a$. Тим самим доведено існування показникової функції з довільною додатною основою a [28].

Властивості показникової функції

Із теореми про почленне диференціювання степеневого ряду всередині кола збіжності випливає, що показникові функція e^x диференційовна. При цьому, якщо почленно диференціювати ряд (3.1.2), отримаємо, що

$$(e^x)' = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \cdots = 1 + x + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = e^x.$$

Це означає, що функція e^x є розв'язком диференціального рівняння $y' = y$, яке задовольняє початкову умову $y(0) = 1$ [25].

Так як $(e^x)' = e^x > 0$, то показникова функція e^x зростає. Звідси випливає, що функція e^{kx} зростає при $k > 0$ і спадає при $k < 0$. Тому відображення $f: x \to e^{kx}$ множини R на множину R_+ бієктивне при будь-якому $k \neq 0$.

Із бієктивності відображення $x \to e^x$ випливає, що існує функція, зворотна функції e^x. Її позначають $\ln x$ і називають натуральним логарифмом. Таким чином, твердження $y = e^x$ і $x = \ln y,\ y > 0$ еквівалентні. Звідси випливає, що $e^{\ln y} = y,\ y > 0$ і $\ln(e^x) = x$.

Функція e^{kx} задовольняє умовам а) – в) і має значення e^k при $x = 1$. Отже, вона співпадає з функцією $(e^k)^x: (e^k)^x = e^{kx}$. Звідси випливає, що

$$((e^k)^m)^x = (e^{km})^x = e^{kmx} = (e^k)^{mx}. \tag{3.1.3}$$

Для будь-якого $a > 0,\ a \neq 1$ знайдеться таке $k \neq 0$, що $a = e^k$. Із (3.1.3) отримаємо, що

$$(a^m)^x = a^{mx} \tag{3.1.4}$$

Ця рівність має місце і при $a = 1$, якщо покласти $1^x = 1$ для всіх x.

Оскільки $a^x = e^{kx}$, то функція a^x бієктивна при будь-якому $a > 0$, $a \neq 1$ і тому також має зворотну функцію. Цю функцію позначають $\log_a x$ і називають логарифмічною функцією з основою a [18].

Логарифмічна функція $\ln x$ задає ізоморфне відображення групи $(R_+; \cdot)$ на групу $(R; +)$, зворотне ізоморфізму $x \to e^x$. Розглянемо тепер автоморфізми групи $(R_+; \cdot)$. Композиція f відображення $x \to e^x$ з таким автоморфізмом φ також є ізоморфним відображенням групи $(R;\ +)$ на $(R_+; \cdot)$. Насправді,

$$f(s+t) = \varphi(e^{s+t}) = \varphi(e^s \cdot e^t) = \varphi(e^s) \cdot \varphi(e^t) = f(s) \cdot f(t).$$

Але будь-який ізоморфізм $(R;\ +)$ на $(R_+; \cdot)$ має вигляд $x \to e^{\lambda x}$, $\lambda \neq 0$. Отже,

$$\varphi(e^x) = f(x) = e^{\lambda x}.$$

Позначимо e^x через y, отримуємо, що автоморфізм φ має вигляд

$$\varphi(y) = y^{\lambda}, y \geq 0.$$

Ми довели, що будь-який автоморфізм групи $(R_+; \cdot)$ є степеневою функцією. Легко доводиться, що будь-який автоморфізм групи $(R;\ +)$ має вигляд $x \to kx$.

Інші підходи до поняття показникової функції

Доводячи існування показникової функції, ми спиралися на теорію степеневих рядів. Це доведення може бути проведено інакшими способами, наприклад, за допомогою теореми існування й єдності розв'язання диференціального рівняння. Застосовуючи цю теорему до диференціального рівняння $y' = y$, переконуємося, що для будь-якого C існує єдиний розв'язок цього рівняння, яке приймає при $x = 0$ значення C. Позначимо через $\exp x$ розв'язок цього рівняння, такий, що $y(0) = 1$. Тоді розв'язок, який приймає при $x = 0$ значення C, має вигляд $y = C \cdot \exp x$. Насправді,

$$(C \exp x)' = C \cdot \exp x \text{ і } C \cdot \exp 0 = C \cdot 1 = C.$$

Доведемо, що функція $\exp(x+a)$ при будь-якому a задовольняє умови а) – в) теореми 3.1.1. Насправді, для будь-якого a функція $\exp(x+a)$ також задовольняє рівняння $y' = y$:

$$(\exp(x+a))' = \exp(x+a) \cdot (x+a)' = \exp(x+a).$$

Отже, функція $\exp(x+a)$ має вигляд $C \exp x$. Вважаючи $x = 0$ у рівності $\exp(x+a) = C \exp x$, переконуємося, що $\exp a = C \exp 0$. Але за умовою $\exp 0 = 1$, і тому $\exp a = C$, тобто $\exp(x + a) = \exp a \cdot \exp x$. Цим доведено виконання умови 1 [17].

У силу того, що функція $\exp x$ однозначно визначена на деякому околі $]-h, h[$ точки $x = 0$, отримуємо, що вона визначена у будь-якій точці x числової вісі. Справді, знайдеться таке n, що $\left|\frac{x}{n}\right| < h.$ А тоді $\exp x = (\exp \frac{x}{n})^{\,n}$.

Оскільки функція $\exp x$ диференційовна при будь-якому значенні x, вона неперервна на всій числовій вісі. Покажемо, що вона додатна при всіх значеннях x. Справді, в іншому випадку знайшлася б точка, де ця функція від'ємна, а тоді знайшлося б значення G, таке, що $\exp C = 0$. Але тоді $\exp 0 = \exp(-C + C) = \exp(-C) \exp C = 0$, всупереч умови $\exp 0 = 1$. Отже, всі значення функції $\exp x$ додатні [18].

Ми довели, що функція $\exp x$ задовольняє умови а) – в) визначення показникової функції і тому є показниковою функцією $\exp x \ = a^x$. Основа a цієї функції дорівнює $\exp 1$. Неважко перевірити, що вона співпадає з раніше введеною основою e (сумою ряду 3.1.2). Це випливає з того, що, як було показано вище , функція e^x, визначена за допомогою ряду 3.1.2, задовольняє диференціальному рівнянню $y^{'} = y$ і початковій умові $y(0) = 1$.

Розв'язання диференціального рівняння $y^{'} = y$ можна представити у вигляді

$$x = \int \frac{dy}{y}.$$

Цей підхід дозволяє визначити функцію $\ln x$, зворотну функції e^x, як інтеграл виду

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Можна, відходячи від цього визначення логарифмічної функції, вивести всі її властивості, а потім отримати відповідні властивості показникової функції як зворотної показникової.

Викладені вище підходи до поняття показникової функції вимагають використання методів диференціального та інтегрального числення. Існує виклад теорії показникової функції, який використовує лише поняття границі і неперервності. Один із них, по суті, дається в середній школі. При цьому викладі показникові функція визначається конструктивно: для натуральних значень показника – формулою $a^n = a \dots a$ (n раз) для додаткових раціональних значень показника – формулою $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, а для від'ємних раціональних значень показника – формулою $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Після цього визначаємо значення a^x при $a > 1$ й ірраціональному значенні x як число, яке розділяє множини

$$X = \{a^r \mid r \in Q, r < x\} \text{ і } Y = \{a^r \mid r \in Q, r > x\}$$

(або як $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, де $\lim_{n\to\infty} r_n = x, r_n \in Q$).

Щоб довести однозначність такого визначення a^x, треба показати, що множини X та Y поділяються лише одним числом або, що для будь-яких послідовностей (r_n) і (s_n), таких, що $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = x$, границі $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ і $\lim_{n\to\infty} a^{s_n}$ однакові. Ці доведення потребують копітких оцінок, які дозволять впевнитися у неперервності побудованої функції на множині Q. Після цього треба довести неперервність показникової функції для всіх значень $x \in R$, виводити її властивості і т. д.. Якщо врахувати, що на кожному етапі розширення поняття про показники доводиться знову доводити властивості показникової функції, цей традиційний шлях навряд чи можна визнати доцільним [18].

3.2. Елективний курс «Знайомство з двовимірними та многовидами»

На сьогодні в українських загальноосвітніх закладах намагаються активно реалізувати систему профільного навчання.

Профільне навчання – це засіб диференціації та індивідуалізації навчання, що дозволяє за рахунок змін у структурі, змісті та організації освітнього процесу, створювати умови для навчання старшокласників відповідно до їх професійних інтересів та намірів щодо продовження освіти [45].

Одним з профілей такого навчання є елективні курси (курси за вибором). Елективними курсами називають обов'язкові курси, які здобувачі середньої освіти (9 – 11 класів) обирають за власним бажанням, здійснюються за рахунок варіативної складової типового навчального плану. Елективні курси є обов'язковою рисою профільної підготовки [35].

Метою елективних курсів є поглибити знання, розвити здібності та професійне самовизначення здобувачів середньої освіти, сформувати компетентності [21].

Курси за вибором не мають державних стандартів та контролю знань. Зміст даних курсів може виходити за рамки шкільних навчальних предметів. Вони розраховані у середньому на 6 – 72 години.

Зміст елективних курсів з математики для допрофільної підготовки не повинен повторювати зміст математичної освіти в основній школі.

Перелік програм математичних курсів за вибором для використання в основній школі схвалено науково-методичною комісією з математики науково-методичної Ради МОН України (наказ МОН України № 1021 від 28.10.2010 р.) [34].

Ми пропонуємо включити питання топології у спеціальний курс, адже топологія – це новий напрям геометрії. Предметом вивчення якої є властивості геометричних фігур, які залишаються незмінними, навіть якщо підлягають перетворенням, які руйнують всі їх метричні і проективні властивості.

Ми розробили елективний курс на тему «Знайомство з двовимірними і тривимірними многовидами». Адже вважаємо, що дана топологічна лінія є важливою для учнів, які навчаються у фізико-математичному профілі, тому що вона розвиває креативне мислення і має міжпредметні зв'язки з математикою, фізикою та астрономією. Проте введення у практику такого матеріалу потребує не один рік і немалого методичного досвіду.

Цілі курсу:

1. опанувати конкретні математичні знання та досвід для подальшої освіти;
2. сформувати розуміння важливості математики для суспільного прогресу;
3. сформувати якості абстрактного мислення.

Завданнями курсу є:

1. розвити креативне та логічне мислення, інтелектуальні уміння;
2. навчити оперувати геометричними об'єктами у просторі, встановлювати просторові відношення між реальними об'єктами;
3. поповнити словниковий запас математичними термінами;
4. реалізувати міжпредметні зв'язки;
5. розвивати компетентності.

Даний елективний курс рекомендовано для здобувачів середньої освіти 11 класів, які обрали математичну сферу діяльності, адже учні на цьому етапі володіють достатніми знаннями, уміннями і навичками для засвоєння інформації з даної теми.

Форми проведення: лекція, практичні заняття, бесіди.

При завершенні розгляду теми пропонуємо провести заняття у вигляді міні-олімпіади.

До вашої уваги пропонуємо програму елективного курсу, яка розрахована на 9 навчальних годин.

Календарно-тематичне планування

елективного курсу

«Знайомство з двовимірними і тривимірними многовидами»

№	Тема	К-ть годин
1.	Знайомство з поняттями двовимірних і тривимірних многовидів	1
2.	Григорій Перельман і проблема Пуанкаре	1
3.	Гіпотеза Пуанкаре і Терстона	1
4.	Приклади двовимірних многовидів	1
5.	Проективна площина і проективна пряма як результат склеювання карт. Функції склеювання (функції заміни координат). Дія тора	2
6.	Приклади тривимірних многовидів	1
7.	Приклади просторів, які виникають під дією функторів експоненціального типу	1
8.	Міні-олімпіада з курсу	1

Деякі з матеріалів елективного курсу наведено у додатках (див. додатки).

3.3. Експериментальна перевірка результативності курсу

Ми проводили педагогічний експеримент у рамках елективного курсу у Херсонському навчально-виховному комплексі № 48 Херсонської міської ради з ціллю перевірки наступної гіпотези: впровадження розробленого елективного курсу сприяє розвитку вміння узагальнювати та систематизувати матеріал, формуванню математичних ідей та алгоритмічної культури учнів.

Педагогічне дослідження проводилося у три етапи: констатуючий, пошуковий, формуючий.

На першому етапі дослідження була проведена діагностика, збір та аналіз інформації про мотиви здобувачів середньої освіти до вибору спеціалізації у вищому навчальному закладі, про степінь їх участі у виборі спеціалізації.

На другому етапі дослідження була розроблена модель передпрофільної підготовки з математики, у якій в оптимальні терміни учні 11-х класів змогли б співвіднести свої навчальні інтереси і вибір направлення навчання у вищому навчальному закладі. Розроблено програму елективного курсу, відредаговано зміст пробного курсу.

А на останньому етапі основним завданням дослідження було експериментальна перевірка запропонованої гіпотези, зміст елективного курсу і запропонованої методики її реалізації з метою передпрофільної підготовки з математики.

У 2021 н. р. був проведений констатуючий етап дослідження, який був спрямований на розв'язання таких задач:

1) вивчення і аналіз стану перед профільної підготовки з математики у сучасній школі;

2) виявлення відношення учителів до питання, яке досліджувалося, та типових труднощів, із якими стикаються вчителі при проведенні занять з передпрофільної підготовки;

3) вивчення мотивів навчання здобувачів середньої освіти і мотивів при виборі спеціальності у вищих навчальних закладах.

Для розв'язання поставлених задач ми проаналізували нормативні документи, методичні посібники, рекомендації з проведень передпрофільної підготовки. Також ми проаналізували програми елективних курсів з математики, які є найбільш розповсюдженими у наш час. Для розв'язання другої задачі ми використовували такі методи дослідження, як бесіда, анкетування, в якому приймали участь вчителі кафедри математики, фізики та інформатики Херсонського НВК № 48.

Для вивчення мотивів навчання здобувачів середньої освіти і мотивів вибору спеціалізації ми використали метод анкетування, в якому взяли участь учні 11-х класів у кількості 61 учня. Вивчення мотивів навчання здійснювалося за допомогою репертуарної сітки, яка допомогла вивчити внутрішні і зовнішні мотиви навчання з кожного предмету. Ми проводили аналіз за всіма навчальними предметами і окремо з математики. Це дозволило зробити висновки про перевагу зовнішніх мотивів навчальної діяльності (вплив батьків, думка вчителів та ін..) (див. рис. 3.3.1).

Рисунок 3.3.1 – Діаграми з результатами внутрішніх та зовнішніх мотивів з математики та інших предметів

Під час проведення пошукового етапу ми виконували такі задачі:

1) розроблення програми елективного курсу з математики;

2) апробація і корекція змісту елективного курсу, який пропонуємо, з метою перевірки можливості використання у передпрофільній підготовці;

3) обрання тих методів, які дають найбільший ефект передпрофільної підготовки.

Ми виокремили два критерії, які дозволяють перевірити висунуту гіпотезу:

1. зміна рівня мотивації до вивчення математики;

2. успішність навчальної діяльності при вивченні матеріалу елективного курсу та матеріалу профільного курсу математики в 11-му класі.

Моніторинг рівня змін перерахованих критеріїв на цьому етапі дослідження дозволив своєчасно вносити зміни і доповнення у розроблені методичні матеріали.

На основі запропонованої концепції формування елективних курсів з математики була розроблена програма.

Отже, ефективність такого навчання позитивно позначається на профільному рівні вивчення математики у вищих навчальних закладах.

Основною метою останнього, формуючого, етапу дослідження є експериментальна перевірка висунутої гіпотези, програми і методики елективного курсу, які були запропоновані.

При вивченні елективного курсу здобувачі середньої освіти 11-х класів з інтересом втягувалися у самостійний пошук і самостійне вивчення певних питань. Велика увага приділялася збільшенню знань здобувачів освіти, вмінню працювати самостійно, що дозволяє учням виражати свої інтереси і усвідомлено підійти до питання вибору профілю навчання.

На рис. 3.3.2 зображено результати аналізу рівня мотивації до вивчення математики у процесі проведення елективного курсу.

Рисунок 3.3.2 – Діаграми з результатами внутрішніх та зовнішніх мотивів на початок та по закінченню проведення експерименту

Формуючий етап дослідження підтвердив ефективність нашого курсу і методики його проведення та підтвердив гіпотезу стосовно того, що впровадження розробленого елективного курсу сприяє розвитку вміння узагальнювати та систематизувати матеріал, формуванню математичних ідей та алгоритмічної культури учнів.

ВИСНОВКИ

На сьогодні перед нами стоять високі вимоги до підготовки кваліфікованих працівників з немалим рівнем загальноосвітньої підготовки. Одне з вирішень цієї проблеми є введення компетентнісного підходу до навчання. Математика виконує роль мови наукових досліджень, важливу роль у цьому відіграє геометрична складова. Тому набуття здобувачами середньої освіти математичних компетентностей є однією з основних складових формування ключових компетентностей випускників.

Відповідно до поставленої мети та завдань у ході дослідження було отримано такі результати:

- проаналізовано навчально-методичну літературу з теми «Многовиди»;
- розглянуто гіперпростори топологічних просторів достатньо загальної природи без додаткових структур та основні положення, які стосуються теорії многовидів;
- розроблено елективний курс «Знайомство з двовимірними многовидами» для здобувачів освіти старшої школи.

Ці результати дають підстави зробити такі висновки:

1. проаналізовано навчально-методичну літературу щодо топологічної класифікації двовимірних компактних многовидів;
2. розглянуто гіперпростори експоненціального типу, зокрема простори замкнутих підмножин, вихідного компакту x. Наведено приклади фактор функторів та досліджено основні функторіальні конструкції;
3. розроблені методичні матеріали елективного курсу «Знайомство з двовимірними многовидами», які можуть бути використані для здобувачів освіти з поглибленим вивченням математики.

Проте хочемо зазначити, що отримані результати не вичерпують усієї повноти проблеми, а це говорить про необхідність подальшого поглибленого вивчення теоретичних і практичних аспектів у даному напрямі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Bring M. Introduction to differential topology. New York, 1994. 172 p.

2. Frechet M. Les dimensions d'un ensemble abstrait. Mathematische Annalen. 1910. Iss. 68. P. 145-168.

3. Hatcher A. Algebraic topology. Cambridge, 2002. 556 p.

4. Lee J.M. Introduction to topological manifolds. New York: Springer, 2000. 433 p.

5. Matsumoto Y. An introduction to Morse theory. Translations of Mathematical Monographs. 2001. Vol. 208. 219 p.

6. Savchenko A. G. Properties of the mapping $\exp_n^c f$. Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. 1985. №1. P.19-25.

7. Savchenko A.G. Functor $\exp_n^c$, absolute retracts and Hilbert space. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1985. № 38 (6). P. 986-992.

8. Scott P. The Geometries of 3-Manifolds. The Bulletin of the London Mathematical Society. 1983. Vol. 15. Part 5. P. 401-487.

9. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. Москва: Высшая школа, 1979. 336 с.

10. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологи в задачах и упражнениях. Москва: Наука, 1974. 423 с.

11. Бабич В. М., Пєхтєрєв В. О. Загальна топологія в задачах і прикладах. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2015. 208 с.

12. Барр Ст. Россыпи головоломок. Москва: Мир, 1978. 415 с.

13. Белага Э. Г. Мини-геометрии (четыре фрагмента математики XX века). Москва: Знания, 1977. 64 с.

14. Болтянський В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. Москва: Наука, 1982. 148 с.

15. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків: Основа, 1995. 303 с.

16. Введение в топологию / Ю. П. Борисович и др. Москва: Высшая школа, 1980. 295 с.

17. Величко. М. В. Математика 9-10 классы. Проектная деятельность учащихся. Волгоград: Учитель, 2006. 122 с.

18. Современные основы школьного курса математики: пособие для студентов пед. ин-тов / Н. Я. Виленкин и др. Москва: Просвещение, 1980. 240 с.

19. Элементарная топология / О. Я. Виро и др. Москва: МЦНМО, 2008. 368 с.

20. Задачный учебник по топологии / О. Я. Виро и др. Москва: МЦНМО, 2010. 352 с.

21. Державний стандарт базової середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 №898. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrayinska-shkola/derzhavnij-standart-bazovoyi-serednoyi-osviti.

22. Дубровин П. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения: Учебн. пособие. Москва: Наука, 1979. 760 с.

23. Келли Дж. Л. Общая топология. Москва: Наука, 1981. 432 с.

24. Кордемский Б. А. Математическая смекалка: Москва: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. 576 с.

25. Лизинский В. М. Робота з обдарованою молоддю. Науково-практичний журнал «Завуч» для адміністрації шкіл. 2004. №7. С. 83-87.

26. Аверьянов Д. И., Алтынов П. И., Баврин И. И. Математика: Большой справочник для школьников поступающих в вузы. Москва: Дрофа, 2002. 864 с.

27. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. Москва: Мир, 1972. 280 с.

28. Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие для вузов. Москва: Издательство физико-математической литературі, 2004. 412 с.

29. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Москва: МГУ,1980. 440 с.

30. Морс М. Вариационное исчисление в целом. Институт компьютерных исследований, 2010. 512 с.

31. Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. Москва: Наука, 1987. 434 с.

32. Пришляк О.О. Теорія Морса: навч. посібник. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2002. 65 с.

33. Пришляк О.О. Топологія многовидів. Київ: Київський університет, 2013. 83 с.

34. Прокопенко Н.С., Вашуленко О.П., Єргіна О.В. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч.ІІ. Профільне навчання. Харків: Ранок, 2011. 384 с.

35. Про затвердження Концепції профільного навчання у старшій школі: наказ Міністерства освіти і науки України від 21 жовтня 2013 р. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/npa/5a1fe82a9c95d.pdf.

36. Синюков Н. С., Матвеенко Т. И. Топология. Київ: Вища школа,1984. 264 с.

37. Спицын И. Лист Мебиуса и его применение. Международный школьный научный вестник. 2019. № 1. Ч. 3. С. 387-393.

38. Стюарт Я. Топология. Квант. 1992. № 7.

39. Тригг Ч. Задачи с изюминкой. Москва: Мир, 1975. 304 с.

40. Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия. Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Выпуск 3 (219). С. 177 -195.

41. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Топология гиперпространств и ее приложения. Москва: Знание, 1989. С. 3-23.

42. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. Москва: Наука, 1989. 512 с.

43. Шарафутдинов В. А. Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию: учеб. пособие. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018. 282 с.

44. Шарко В.В. Функции на многообразиях. Киев: «Наук.думка», 1990. 196 с.

45. Штомпель Г. Г. Значение и социальная направленность элективных курсов в современной школе. Профильная школа. 2007. № 2. С. 47-51.

46. Щепин Е. В.Функторы и несчетные степени компактов. Успехи математических наук. 1981. Т. 36. Вып. 3. С. 3-62.

47. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986. 752 с.

48. Топологія. Частина IV: Навчальний посібник для самостійної роботи студентів / Н.В. Яблонська та ін. Одеса: ПНПУ, 2013. 50 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

**КОДЕКС АКАДЕМІЧНОЇ ДОБРОЧЕСНОСТІ
ЗДОБУВАЧА ВИЩОЇ ОСВІТИ ХЕРСОНСЬКОГО
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

Я, Конотоп Катерина Анатоліївна
учасник(ця) освітнього процесу Херсонського державного університету, **УСВІДОМЛЮЮ**, що академічна доброчесність – це фундаментальна етична цінність усієї академічної спільноти світу.

ЗАЯВЛЯЮ, що у своїй освітній і науковій діяльнос і **ЗОБОВ'ЯЗУЮСЯ**:

– дотримуватися:

- вимог законодавства України та внутрішніх нормативних документів університету, зокрема Статуту Університету;
- принципів та правил академічної доброчесності;
- нульової толерантності до академічного плагіату;
- моральних норм та правил етичної поведінки;
- толерантного ставлення до інших;
- дотримуватися високого рівня культури спілкування;

– надавати згоду на:

- безпосередню перевірку курсових, кваліфікаційних робіт тощо на ознаки наявності академічного плагіату за допомогою спеціалізованих програмних продуктів;
- оброблення, збереження й розміщення кваліфікаційних робіт у відкритому доступі в інституційному репозитарії;
- використання робіт для перевірки на ознаки наявності академічного плагіату в інших роботах виключно з метою виявлення можливих ознак академічного плагіату;

– самостійно виконувати навчальні завдання, завдання поточного й підсумкового контролю результатів навчання;

– надавати достовірну інформацію щодо результатів власної навчальної (наукової, творчої) діяльності, використаних методик досліджень та джерел інформації;

– не використовувати результати досліджень інших авторів без використання покликань на їхню роботу;

– своєю діяльністю сприяти збереженню та примноженню традицій університету, формуванню його позитивного іміджу;

– не чинити правопорушень і не сприяти їхньому скоєнню іншими особами;

– підтримувати атмосферу довіри, взаємної відповідальності та співпраці в освітньому середовищі;

– поважати честь, гідність та особисту недоторканність особи, незважаючи на її стать, вік, матеріальний стан, соціальне становище, расову належність, релігійні й політичні переконання;

– не дискримінувати людей на підставі академічного статусу, а також за національною, расовою, статевою чи іншою належністю;

– відповідально ставитися до своїх обов'язків, вчасно та сумлінно виконувати необхідні навчальні та науково-дослідницькі завдання;

– запобігати виникненню у своїй діяльності конфлікту інтересів, зокрема не використовувати службових і родинних зв'язків з метою отримання нечесної переваги в навчальній, науковій і трудовій діяльності;

– не брати участі в будь-якій діяльності, пов'язаній із обманом, нечесністю, списуванням, фабрикацією;

– не підроблювати документи;

– не поширювати неправдиву та компрометуючу інформацію про інших здобувачів вищої освіти, викладачів і співробітників;

– не отримувати і не пропонувати винагород за несправедливе отримання будь-яких переваг або здійснення впливу на зміну отриманої академічної оцінки;

– не залякувати й не проявляти агресії та насильства проти інших, сексуальні домагання;

– не завдавати шкоди матеріальним цінностям, матеріально-технічній базі університету та особистій власності інших студентів та/або працівників;

– не використовувати без дозволу ректорату (деканату) символіки університету в заходах, не пов'язаних з діяльністю університету;

– не здійснювати і не заохочувати будь-яких спроб, спрямованих на те, щоб за допомогою нечесних і негідних методів досягати власних корисних цілей;

– не завдавати загрози власному здоров'ю або безпеці іншим студентам та/або працівникам.

УСВІДОМЛЮЮ, що відповідно до чинного законодавства у разі недотримання Кодексу академічної доброчесності буду нести академічну та/або інші види відповідальності й до мене можуть бути застосовані заходи дисциплінарного характеру за порушення принципів академічної доброчесності.

01.09.2020	К.Кон	Катерина Конотоп
(дата)	(підпис)	(ім'я, прізвище)

Додаток Б

Матеріали для елективного курсу

ТЕМА 1. Знайомство з двовимірними і тривимірними многовидами

Тисячі років тому всі вважали, що Земля плоска. Сьогодні вже зрозуміло як могло виникнути помилкове уявлення, адже навіть з висоти пташиного польоту невелика частина земної поверхні, яка має наближено сферичну форму, виглядає як невелика ділянка площини.

Дослідження в області топології пояснюють, що з такою ж ситуацією ми стикаємося при спробах описати форму Всесвіту у цілому на основі спостережень обмеженої її частини, яку бачимо з нашої точки простору. Спостерігач, який знаходиться на Землі, не може з впевненістю зробити висновок, що Всесвіт на всій нескінченій відстані зберігає геометричну структуру звичайного евклідового простору. Є одна відома ідея, яка полягає в тому, що простір «викривлений» майже таким чином, як може бути викривлена поверхня. Тривимірна кривизна простору і тісно пов’язана з нею чотиривимірна кривизна простору-часу стали важливими поняттями в астрономії і космології, оскільки вони грають ключову роль в загальній теорії відносності Ейнштейна.

Тим не менш визначення однієї тільки кривизни не достатнє для опису того, що ми називаємо формою Всесвіту. Деякі можливі типи тривимірної структури Всесвіту можна описати за аналогією з двовимірними поверхнями, але ця аналогія лише наводить на думку про багатство і різноманіття форм, які з’являються при додаванні третього виміру. Проте можна припустити, що адекватний математичний опис Всесвіту повинен бути чотиривимірним. Але є підства сподіватися, що структура чотиривимірного простору-часу визначається структурою її тривимірної просторової частини. Тому структуру Всесвіту в цілому потрібно почати з вивчення типів тривимірних об'єктів, геометричні властивості яких могли б знаходитися у згоді з властивостями Всесвіту. Такі об'єкти називаються тривимірними многовидами або 3-многовиди.

Теорія многовидів виникла в *XIX* ст. у зв'язку з потребою геометричної інтерпретації кількісних відношень. Наприклад, множина розв'язків рівняння з двома невідомими можна зобразити як деяку множину точок на площині. Кожна точка відповідає парі значень невідомих, які задовольняють дане рівняння; у типових випадках ця множина точок являє собою криву або декілька кривих. Подібно до цього, множину розв'язків рівняння з трьома невідомими можна представити у вигляді двовимірної поверхні у тривимірному просторі, наприклад, такій, як поверхня сфери. Для рівняння більш ніж з трьома невідомими множина розв'язків можна геометрично описати таким же чином: цей многовид більш високої розмірності, яка лежить у просторі ще більшого числа виміру. Хоча такі об'єкти наочно уявити неможна, математики розробили якісні методи для доведення рівнянь, які призводять до многовидів високої розмірності.

Дійсно, топологія не може розв'язувати рівняння. Так, хоча многовид точок, які зображають розв'язання будь-якого рівняння, мають визначену форму, предметом вивчення топології є не властивості цієї конкретної форми, а тільки ті властивості, які зберігаються при будь-яких деформаціях цього многовиду, які виконуються без розривів, розрізів або проколів.

Розглянемо деякі цікаві випадки.

Топологічна структура Всесвіту не зобов'язана співпадати зі структурою нескінченого тривимірного евклідового простору. Математична теорія тривимірних многовидів показує, що простір може «викривлятися сам в собі» нескінченим числом способів. Однією з можливих моделей топології простору є тривимірний многовид, який був відкритий Г. Зейфертом і К. Вебером у 1932 році. Такий многовид неможливо наочно зобразити зовні, тому що для цього довелося б «заглянути» на нього з четверного або більш високого виміру. Тим не менш його можна уявити собі як додекаедр, протилежні грані якого математично склеєні один з одним, тобто ототожнені (див. рис. 1.1)

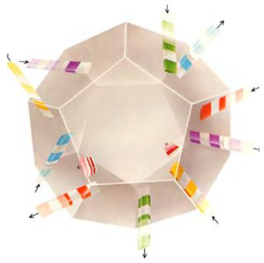

Рисунок 1.1 – додекаедр, протилежні грані якого ототожнені

Двовимірний многовид, який називають двовимірним тором, можна уявити у вигляді квадрату, протилежні сторони якого абстрактно склеєні один з одним: верхня сторона ототожнюється з нижньою, а права – з лівою. Якщо розмічена планка висувається зовні через праву сторону, вона з'являється знову з лівої сторони; якщо планка йде за верхню сторону, то вона з'явиться знизу. Всі вершини склеюються в одну точку многовиду (див. рис. 1.2).

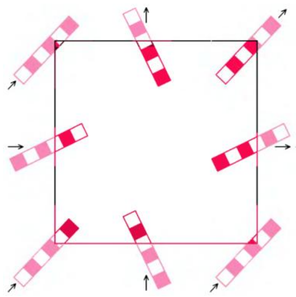

Рисунок 1.2

Вид, який відкривається спостерігачу всередині тривимірного тору, схоже на те, що можна побачити у кімнаті, всі стіни, підлогу і стелю, які є дзеркальними; тільки зображення, на відмінну від звичайного дзеркального відображення, не перевернуте. Промінь зору йде, скажімо, через праву стіну і повертається з лівої стіни; тому, дивлячись направо, спостерігач бачить кімнату так, як начебто він дивиться на неї зовні через прозору ліву стіну (тільки при цьому бачить в кімнаті свого двійника) (див. рис. 1.3).

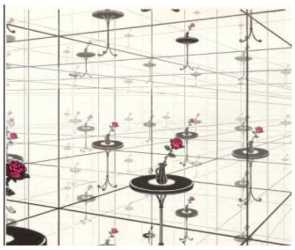

Рисунок 1.3

Поверхня бублика з однією діркою можна розрізати і розвернути так, що отримається квадрат (див. рис. 1.4). Якщо протилежні сторони квадрату абстрактно склеєні, то отримана поверхня топологічно еквівалентна бублику. Так як квадрат плоский, його геометрія евклідова. Тому кажуть, що з топологічної точки зору поверхня бублика з однією діркою допускає евклідову геометрію.

Рисунок 1.4

ТЕМА 2. Григорій Перельман і проблема Пуанкаре

Математичний інститут Клея (Массачусетс, США) присудив петербурзькому ученому-математику Григорію Перельману премію тисячоліття за доведення гіпотези Пункаре. За таке доведення передбачена нагорода 1 мільйон доларів. Інститут нагороджує тих, хто зможе розв'язати одну з семи так званих «Задач тисячоліть». Список цих задач був затверджений у 2000 році. Подібним списком планувалося виділити самі важкі проблеми, з якими зустрічаються математики.

Усе почалося з дослідження, яке Пуанкаре вів в області алгебраїчної геометрії. Він працював над одним з наріжних каменів цієї науки – теорією гомології, особливого класу топологічних інваріантів. У 1900 році він опублікував статтю, в якій довів, що якщо у тривимірній поверхні гомологія співпадає з гомологією сфери, то і сама поверхня – сфера; насправді це твердження навіть сильніші, ніж твердження гіпотези Пуанкаре.

Проте в його міркуванні з'явилася помилка, яку він сам і знайшов, до 1994 року розробив дуже важливе поняття фундаментальної групи і побудував на його базі контрприклад до власної теореми. Тоді він нарешті поставив питання правильно: *будь-який однозв'язний компактний тривимірний многовид гомеоморфний тривимірній сфері.*

Іноді формулюють так: *будь-який однозв'язний компактний тривимірний многовид без краю гомеоморфний тривимірній сфері.*

Різниця у цих формулюваннях складається у тому, що друга містить уточнення «без краю». Справа у тому, що у застосуванні до многовидів використовуються дві термінологічні системи. Перша припускає, що многовиди можуть як мати край, так і не мати його, тому у ній необхідне уточнення для конкретизації виду многовид, який розглядається: многовиди з краєм або многовид без краю. Друга система називає многовидами тільки ті об'єкти, які у першій системі називаються многовидами без краю. Таким чином, два внутрішні відмінні формулювання гіпотези Пуанкаре рівносильні, справа тільки у термінологічній неоднозначності.

Достатньо довго на гіпотезу не звертали увагу. Інтерес до неї пробудив Генрі Уайтхед, який у 1930-ті роки оголосив про те, що знайшов доведення гіпотези. Майже відразу було виявлено, що його доведення було неправильним. Проте в процесі пошуку і спроб виправити свої неточності він виявив цікаві класи тривимірних поверхонь і значно просунув теорії, яка пізніше отримала назву топології малих (або нижчих) розмірностей. У $50-60$-ті роки XX століття сплеск інтересу до проблеми знову породив декілька помилкових оголошень про те, що теорему вдалося довести, і після цього математики зрозуміли, що гіпотезу Пуанкаре так просто не візьмеш: з шістдесятих років і до робіт Григорія Перельмана хибні доведення представляли тільки любителі.

Топологія нижчих розмірностей стала окремою гілкою математики за дивовижної причини – у багатомірному випадку все набагато простіше! Уже в $50-60$-ті роки твердження, аналогічні гіпотезі Пуанкаре, були доведені для більш високих розмірностей. Тривимірний випадок продовжував залишатися каменем спотикання. Крім того, гіпотеза Пуанкаре має достатньо загально признану космологічну інтерпретацію. Можна припустити, що Всесвіт володіє властивостями однозв’язного компактного тривимірного многовиду. Гіпотеза стверджує, що Всесвіт у відомому розумінні не відрізняється від тривимірної сфери.

Для більшого розуміння цього твердження, скажімо, що звичайна двовимірна сфера – це поверхня звичайної тривимірної кулі. Тривимірна сфера недоступна для безпосереднього сприйняття звичайними людьми, проте цілком можливо, що у ній ми живемо.

Щоб отримати уявлення про сенс гіпотези Пуанкаре, пояснимо терміни, в яких вона формується, без використання точних математичних визначень. Пояснення потребує п’ять понять: «однозв’язне», «компактний многовид», «многовид без краю», «гомеоморфно», «тривимірна сфера».

Спочатку зауважимо, що лінії (прямі, кола, параболи, гіперболи і т. д.) одновимірні, поверхні (площини, сфери, параболоїди, гіперболоїди, тори і т. д.) двовимірні, точки нульвимірні. Ця термінологія напряму пов’язана з можливістю завданням точки на кожному з цих геометричних об’єктів. Положення точки, яка лежить на лінії, задається однією «координатою», положення точки, яка лежить на поверхні – парою «координат». Нульвимірність точки пояснюється тим, що на ній може бути «розташована» точка єдиним чином, тобто не потрібно ніяких «координат».

Тіла тривимірні, і положення точки тіла визначається трьома координатами. Тривимірні тіла обмежують двовимірні поверхні. У нашому світі немає чотиривимірних геометричних тіл, але якщо дуже напружити уяву, то можна уявити чотиривимірний куб, гранями якого є звичайні тривимірні куби. Легше уявити двовимірний світ, який розташований на площині, у якому немає третього виміру. У цьому світі не існує прямої, яка б проходила через вершину прямого кута перпендикулярно сторонам кута. Точно так само, у нашому тривимірному просторі не існує площини, яка проходила б через точку O перетину координатних площин прямокутної системи координат перпендикулярно цим площинам.

Тепер можна пояснити термін «тривимірна сфера» – це поверхня, яка обмежує чотиривимірну кулю – множину точок чотиривимірного простору, яка рівновіддалена від даної фіксованої точки, яку називають центром.

«Однозв'язність» геометричної фігури означає, що будь-яка замкнена лінія, всі точки якої належать цій фігурі, може бути стягнута у точку, не виходячи за межі фігури, яку розглядають. Наприклад, круг однозв'язний, але якщо взяти плоске кільце, то воно вже не однозв'язне, так як лінія, всередині якої лежить «дірка» кільця, не може бути стягнута у точку. Поверхня кулі однозв'язна, а поверхня тору – не однозв'язна за тією ж причиною, що і кільце. Зрозуміло, що тривимірна сфера є однозв'язною геометричною фігурою.

Наступне поняття, сенс якого необхідно роз'яснити, це поняття многовиду. Точне визначення многовид потрібно було б почати з поняття топологічного простору, так як многовид – це клас топологічних просторів з певними додатковими властивостями. Проте обмежимося розглядом многовидів, які являють собою геометричні фігури. Відмінною властивістю многовид без края або просто многовид є його локальна однорідність. Іншими словами, для всіх точок многовиду, які містяться разом з ними «околи» , відмінні один від одного у визначеному розумінні. Наприклад, весь простір, площина, пряма, коло, внутрішність круга – сутність многовиду. Якщо приєднати до середини круга коло, то у цієї множини – круга – появиться «край» і при цьому порушується вказана однорідність. Окіл точки, яка належить колу, яка обмежує круг, істотно відрізняється від околу точки, що належить внутрішності круга. Точки многовид, які належать «краю» будемо називати крайовими, а внутрішності – внутрішніми.

Многовиди можуть мати будь-яку розмірність. Із наведеного вище прикладу зауважимо, що пряма, інтервал (тобто відрізок без кінців) і коло – одномірні многовид; площина, внутрішність круга (або відкритий круг), сфера – двовимірні многовид; простір, внутрішність кулі, внутрішність тора – тривимірні.

Тепер розберемося, що таке компактний многовид. Будемо називати покриттям многовиду будь-яку сукупність його підмножин, об’єднання яких дає даний многовид. Многовид називається компактним, якщо із будь-якого його покриття можна обрати скінчене покриття.

Наочно двовимірні компактні многовиди з краєм можна представити у вигляді клаптевої ковдри, яка зшита з клаптиків, кожний із яких уявляє собою довільним чином деформований круг за допомогою розтягнень і стиснень. Неможна при цьому розривати і склеювати один з одним кожний із отриманих таким чином клаптиків. Якщо зшити з клаптиків поверхню кулі або тора, то отримаємо двовимірний компактний многовид без краю (або просто многовид).

Круг є компактним многовидом з краєм, але відкритий круг хоч і є многовидом, але не є компактним многовидом.

Аналогічно, одновимірні компактні многовид – це лінії, які можна склеїти з скінченого числа як завгодно деформованих відрізків прямої (без розривів і склеювань). При цьому розуміється, що кінець відрізка або не склеюється з нічим (і тоді ми отримаємо многовид з краєм), або склеюється з рівно одним кінцем одного іншого відрізка. Наприклад, множина точок, яка утворює букву «М» утворює компактний многовид, а букву «Т» – не утворює. Коло, а також будь-яка лінія, яка може бути отримана з неї деформацією, є одновимірним компактним многовидом. Інтервал і пів інтервал не є компактними многовидами.

Щоб дати інтуїтивне представлення про тривимірні компактні многовид, потрібно спочатку указати ті фігури, із яких складається будь-який тривимірний компактний многовид. Для одновимірного випадку такими фігураами були деформовані відрізки, а для двовимірного – деформовані круги. За аналогією, у тривимірному випадку для визначення компактного многовид можна скористатися деформованими кулями, які отримуються з кулі стисканням, розтягуванням, всім тим, що робиться з пластиліновою кулею руками дитини. При цьому, як і раніше, неможна робити розриви і склейки. Наприклад, якщо кулю розкачати у циліндр, а потім склеїти його основи, то отримаємо тор, який не є компактним многовидом. Утім, він не є і просто многовидом. Тривимірний компактний многовид – це така геометрична фігура, яка отримується склеюванням скінченого числа деформованих куль.

Легко зрозуміти, що звичайна спортивна гиря з ручкою є компактним многовидом. Зрозуміло, що для склеювання достатньо мати звичайну кулю (можливо дещо деформований для стійкості) і ще одну кулю, розкатану у циліндр (це ручка гирі). Це склеювання можна провести у тривимірному просторі. Зауважимо, що тривимірна сфера є компактним многовидом, але для її склеювання з деформованих куль необхідно вийти у чотиривимірний простір. Щоб зрозуміти цей факт, уявимо, як склеюється зі лоскотів футбольний м'яч, який є у нашій термінології двовимірною сферою.

Можна привести приклад двовимірного компактного многовиду, який «не вміщується» у тривимірний простір. Зауважимо, що двовимірна сфера, як було вже сказано, «вміщається» у тривимірний простір, а тривимірна – чотиривимірному. Так ось бутила Клейна є двовимірним компактним мнговидом, але щоб її склеїти з деформованих кругів треба вийти в чотиривимірний простір.

Тепер перейдемо до поняття гомеоморфізму. У геометрії дві фігури вважаються гомеоморфними, якщо, вважаючи зробленими їх з матеріалу, який дозволяє будь-які деформації, одну можна отримати з іншої деформуванням без розривів і склеювань. Самі такі деформації називаються гомеоморфізмами. Властивість гомеоморфії вивчається у вищому розділі геометрії – топології. Наприклад, куля і куб є гомеоморфними тілами, а куля і тор – не є. З іншої боку, тор і гиря з однією ручкою гомеоморфні і на фігури будь-якої розмірності, починаючи з 2. При цьому, круг і квадрат виявляються гомеоморфними фігурами, а круг і сфера, яка також є двовимірним многовидом, не є гомеоморфними. Неможна вигадати гомеоморфізма, який перетворив би сферу у круг або в бічну поверхню циліндра. У той же час, сфера і повна поверхня циліндра гомеоморфні. Одна з чудових теорем топології стверджує, що будь-який двовимірний компактний многовид, який вміщується у тривимірний простір, гомеоморфний сфері з деякою кількістю ручок.

Отже, зрозуміло, що двовимірна і тривимірна сфери однозв'язні, компактні і не мають краю. Можна задати питання, чи достатньо цих властивостей для однозначного їх визначення з точністю до гомеоморфії. Для двовимірної сфери це питання можна назвати «двовимірною проблемою Пуанкаре»: чи будь-яке двовимірний однозв'язний многовид гомеоморфний двовимірній сфері? Позитивна відповідь на це питання була відома давно, вона була відома і самому Пуанкаре. Для тривимірної сфери питання перетворилося у знамениту «тривимірну проблему Пуанкаре».

У гіпотези Пуанкаре є n-вимірні версії всіх $n > 3$. Вони виявилися «простішими», ніж тривимірна версія. У 1960-ті роки була доведена n-вимірна гіпотеза для всіх $n \geq 5$. Випадок $n = 4$ у 1980-ті роки довів Майкл Фрідман.

Отже, гіпотеза Пуанкаре перетворилася у теорему Пуанкаре – Перельмана, значення якої має величезне значення і для внутрішнього розвитку математики, а також із-за її застосування до космології. Деякі авторитетні вчені заявляють, що доведена теорема дозволяє пояснити процес формування чорних дір. З точки зору математики головне досягнення Перельмана полягає у знайденому їм способі її доведення.

ТЕМА 3. Гіпотеза Пуанкаре і Терстона

Двовимірні многовид. Нехай X і Y – дві множини в евклідовому просторі довільної розмірності. Якщо задано відображення $f : X \to Y$, яке кожній точці множини X ставить у відповідність точку множини Y і

1) відображення взаємно-однозначне, тобто відмінні точки переходять у відмінні;

2) відображення неперервне, тобто ближні точки переходять у ближні;

3) обернене відображення f^{-1} неперервне, то множини X і Y – гомеоморфні, а відображення f називається гомеоморфізмом.

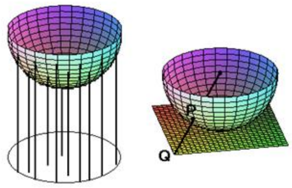

Рисунок 3.1

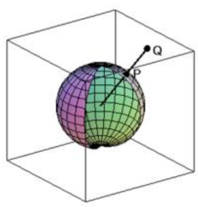

Рисунок 3.2

Наприклад, внутрішність кола гомеоморфна всій площині (див. рис. 3.1), поверхня куба гомеоморфна сфері (див. рис. 3.2).

Пропонуємо, розглянути й інші випадки двовимірних многовидів (див. рис. 3.3 – 3.5).

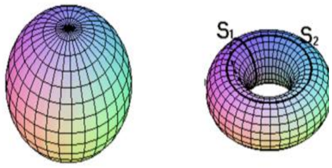

Рисунок 3.3

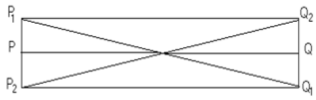

Рисунок 3.4

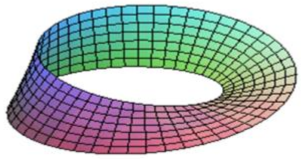

Рисунок 3.5

Будь-яка компактна двовимірна поверхня гомеоморфна або сфері з p ручками, або сфері з q листами Мебіуса, причому сфери з ручками не гомеоморфні сферам з листами Мебіуса, так як другий ряд поверхонь утворюють неорієнтовані поверхні. Сфери з відмінним числом ручок і відмінним числом листів Мебіуса також негомеоморфні між собою (див. рис. 3.6 – 3.10).

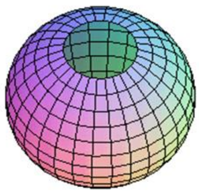

Рисунок 3.6

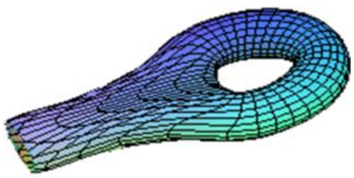

Рисунок 3.7

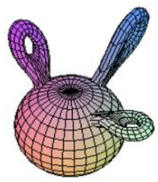

Рисунок 3.8

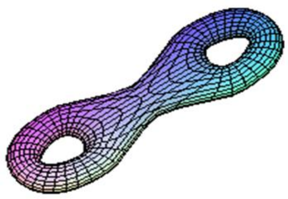

Рисунок 3.9

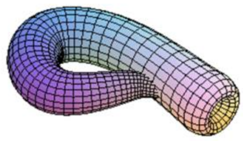

Рисунок 3.10

Фундаментальна група. Дві петлі γ_1 і γ_2, які проходять через фіксовану точку P, називаються гомотопними, якщо їх можна неперервно деформувати одну в іншу. І ми вже можемо розглядати клас $[\gamma]$ гомотопних петель (див. рис. 3.11).

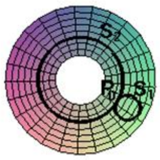

Рисунок 3.11

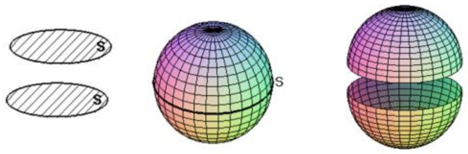

Рисунок 3.12

Тривимірні многовиди. $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ зображено на рис. 3.12.

Кожний компактний орієнтуючий 3-вимірний многовид розкладається в зв'язну суму

$$M = \left(K_1 \# \dots \# K_p\right) \# \left(L_1 \# \dots \# L_q\right) \#_1^r \left(S^2 \times S^1\right),$$

де співмножники K_i, L_j – замкнуті незвідні тривимірні многовиди, $S^2 \times S^1$ – декартовий добуток кола на двовимірну сферу і в зв'язну суму входить r-компонент. K_i-множники мають нескінчену фундаментальну групу, L_j-множники скінчену фундаментальну групу. Приклади тривимірних многовидів (див. рис. 3.13).

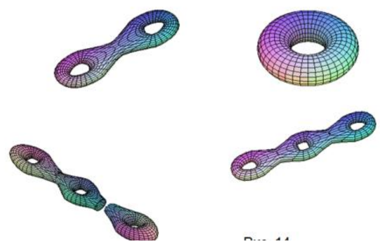

Рисунок 3.13

Будь-який тривимірний компактний непровідний многовид можна розрізати скінченим числом нестискаючих торів на компактні многовиди, границя яких є тори. Кожен з цих многовидів або торо непровідне або є многовидом Зейферта.

Гіпотеза Пуанкаре полягає в наступному. Нехай M^3 – компактний тривимірний однозв'язний многовид (тобто будь-яка петля на многовиді стягується у точку).

Однорідні тривимірні геометрії. У тривимірному випадку всього 8 стандартних геометрій, які

1) в околі кожної точки виглядає однаково, простір є однорідним;

2) задаються на однозв'язному многовиді;

3) і для кожної геометрії існує тривимірний компактний многовид, на якому він задається.

Існування тільки 8 геометрій приписують Терстону, але це випливає з результатів Біанки. Перерахуємо їх:

1) S^3 – метрика стандартної одиничної сфери в E^4;

2) E^3 – евклідовий простір;

3) H^3 – тривимірний простір Лобачевського.

Метрика прямого добутку:

4) $S^2 \times R$;

5) $H^2 \times R$.

Візьмемо простір одиничних кіл у дотичних просторах до площини Лобачевського H^2. У ньому вводиться природна метрика Сасакі. Універсальний накриваючий простір і є

6) $\widetilde{SL}(2, R)$;

7) Nil .

Ця тривимірна група Гейзенберга, яка складається з матриць,

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

які утворюють групу відносно операцій множення і на ній задана метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2.$$

8) Sol.

Це тривимірна група, на якій задана метрика

$$ds^2 = e^{2\,z}dx^2 + dy^2 + e^{-2\,z}dy^2 + dz^2.$$

Зауважимо, що тільки сфера S^3 є однозв'язним компактним многовидом, на якому задана стандартна геометрія.

Геометрична гіпотеза Терстона. Незвідний тривимірний замкнутий многовид розрізається нестискаючими торами на шматки, на яких можна задати одну з стандартних геометрій.

Поток Річчі. Нехай (M^3, g) є рімановий незвідний компактний многовид, на якому у локальних координатах u^1, u^2, u^3 метрика задається у вигляді

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j\,,$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}\,.$$

Потоки Річчі можемо спостерігати на рис. 3.14 – 3.19.

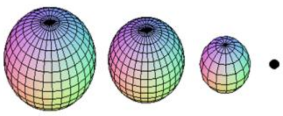

Рисунок 3.14

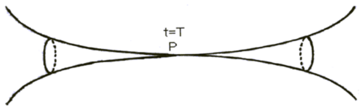

Рисунок 3.15

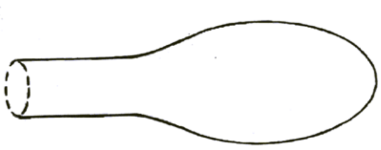

Рисунок 3.16

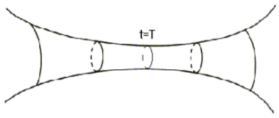

Рисунок 3.17

Рисунок 3.18

Рисунок 3.19

ТЕМА 4. Двовимірні многовиди

Двовимірним сипліціальним комплексом називається родина двохелементних і триелементних підмножин скінченої множини, яка разом з кожною триелементною множиною містить всі три його двоелементні підмножини (див. рис. 4.1). Скорочено називають 2-комплексом.

Елементи даної скінченої множини називають вершинами 2-комплекса, виділені двоелементні підмножини – ребрами 2-комплекса, а виділені триелементні підмножини – гранями 2-комплексу.

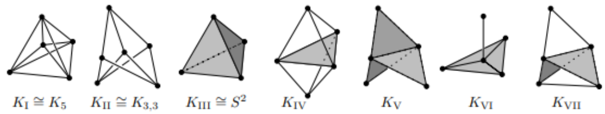

Рисунок 4.1.

Кнопкою називається 2-комплекс з вершинами $c, 0, 1, 2, 3$, в якому виділені триелементні підмножини $\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}$ і $0, 2, 3$ виділені всі їх двоелементні підмножини і $\{c, 0\}$.

Книжкою з n сторінками називається 2-комплекс з вершинами $a, b, 1, 2, \ldots, n$, в якому виділені триелементні підмножини $\{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \ldots, \{a, b, n\}$ і всі їх двоелементні підмножини.

Повним 2-комплексом з n вершинами називається 2-комплекс з вершинами $0, 1, 2, \ldots, n$, в якому всі двоелементні і триелементні підмножини виділені. На рис. 4.2 зображено повний 2-комплекс з 5 вершинами.

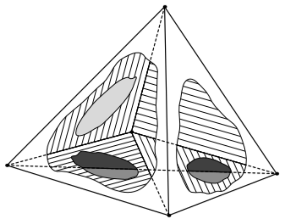

Рисунок 4.2

2-комплекс можна будувати за допомогою «склейок» сторін квадрата або навіть багатокутника (див. рис. 4.3). Шутовский ковпак Зімана отримується склеюванням сторін $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ трикутника ABC.

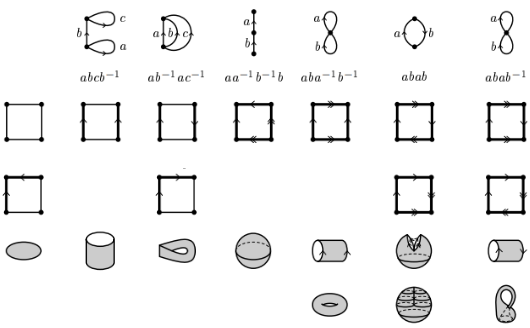

Рисунок 4.3

Ця конструкція формалізується поняттям клітинним розбиттям; тут нам не знадобиться ця формалізація, достатньо інтуїтивного уявлення (див. рис. 4.4).

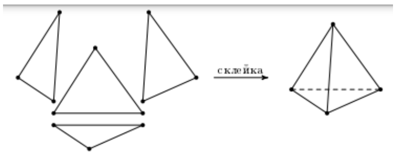

Рисунок 4.4

За 2-комплексом може будуватися геометрична фігура, яку називають її тілом. Неформально, ця фігура отримана склеюванням трикутників і відрізків, які відповідні ребрам і граням 2-комплексу. Склеювання здійснюється не обов’язково у тривимірному просторі: або у багатовимірному просторі, або навіть абстрактно.

2-комплекс – комбінаторний об’єкт. Неможливо, наприклад, взяти точку на його грані. Проте взяті точки на грані тіла 2-комплексу формалізуються взяттям нової вершини 2-комплексу, які утворилися при підрозділі цієї грані (див. рис. 2.5 справа).

Операція підрозділу ребра зображена на рис. 4.5 зліва.

Два 2-комплекси гомеоморфні, якщо від одного можна перейти до іншого за допомогою операції підрозділу і обернених до них.

Двовимірним поліедром називається клас гомеоморфності 2-комплексу. Представники цих класів еквівалентності називаються тріангуляціями відповідного двовимірного поліедра. Саме поліедри і многовиди цікаві топологу. А комплекси і навіть тіла – засоби їх вивчення і зберігання в комп’ютері. Проте комплекси і тіла цікаві дискретному геометру і комбінаторику.

Дві підмножини евклідового простору називаються гомеоморфними, якщо існують взаємно-обернені неперервні відображення між ними.

Теорема. 2-комплекси гомеоморфні тоді і тільки тоді, коли їх тіла гомеоморфні.

2-комплекс називається локально евклідовим, якщо для будь-якої вершини v всі грані, які її містять, утворюють ланцюг

$$\{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\} \text{ або}$$

$$\{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\} \dots \{v, a_{n-1}, a_n\}, \{v, a_n, a_1\}.$$

Якщо для всіх v має місце другий випадок, то локально евклідів 2-комплекс називається замкненим.

Краєм (або границею) ∂N локально евклідова 2-комплексу N називається об'єднання всіх таких його ребер, які містяться тільки в одній грані.

Двовимірним многовидом називається клас гомеоморфності локально евклідова 2-комплекса. Цей 2-комплекс називається тріангуляцією відповідного 2-многовида.

Орієнтація двовимірного плоского трикутника – впорядкування його вершин з точністю до парної перестановки. Орієнтацію зручно задавати колом зі стрілкою, яка лежить у трикутнику (або впорядкованою парою не колінеарних векторів).

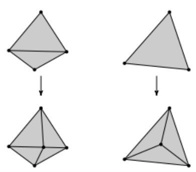

Рисунок 4.5

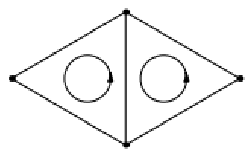

Рисунок 4.6

Орієнтацією локально евклідова 2-комплексу називається набір орієнтацій на всіх його гранях, які узгодженні вздовж кожного ребра, яке лежить у двох гранях, тобто які задають з двох сторін цього ребра протилежні напрями (див. рис. 4.6).

Локально евклідів 2-комплекс називається орієнтуючим, якщо у нього існує орієнтація. 2-многовид називається орієнтуючим, якщо воно має орієнтуючого представника.

Поняття орієнтування неможливо ввести для довільних 2-комплексів, але можна ввести для 2-комплексів, кожне ребро яких міститься не більше, ніж у двох гранях.

Ейлеровою характеристикою 2-коплексу K з V вершинами, E ребрами і F гранями називається число

$$\chi(K) \coloneqq V - E + F.$$

Нерівність Ейлера. Нехай $G \subset K$ підкомплекс у 2-комплексі u до будь-якого ребра у $K - G$ прилягає не більше, ніж до двох граней із $K - G$. Позначимо через $F(K - G)$ кількість зв'язних шматків доповнення $F - G$. Тоді $\chi(G) + F(K - G) \leq \chi(K)$.

Вкладення під комплексу у 2-комплекс називається клітковим,я кщо кожний зв'язний кусок доповнення гомеоморфний відкритому диску. Приведемо формальне комбінаторне визначення.

Нехай в 2-комплексі заданий під комплекс. Розглянемо доповнення до відкритого регулярного кола підкомплексу,тобто об'єднання симплексів другого барицентричного підрозбиття 2-комплексу, не перетинаючи підкомплекс. вкладення підкомплексу у 2-комплекс називається клітковим, якщо кожна зв'язна компонента цього доповнення гомеоморфна диску. Наприклад, вкладення точки у сферу клітино, а у тор – ні.

Формула Ейлера. Нехай $G \subset K$ клітино вкладений під комплекс у 2-комплексі. Позначимо через $F(K - G)$ кількість зв'язних шматків доповнення $F - G$. Тоді $\chi(G) + F(K - G) = \chi(K)$.

ТЕМА 5 – 6. Проективна площина і проективна пряма як результат склеювання карт. Функції склеювання (функції заміни координат). Дія тора

Для початку розглянемо найпростіший приклад торичного многовиду – комплекса проективна пряма. Що це означає?

Нагадаємо, що проективна пряма CP^1 є множин авсіх прямих на комплексній площині C, яка проходить через початок координат 0. Точка на проективній прямій задається її однорідними координатами, тому має сенс записати

$$CP^1 = \{(z_0 : z_1) | \, (z_0, z_1) \neq (0{,}0); \ \forall \lambda \in C \ (z_0 : z_1) = (\lambda z_0 : \lambda z_1)\}.$$

Проективна пряма накривається двома своїми підмножинами (картами): це карти

$$U_1 = \{(z_0 : z_1) \in CP^1 | z_0 \neq 0\}$$

$$\text{і } U_2 = \{(z_0 : z_1) \in CP^1 | z_1 \neq 0\}.$$

Поділивши на z_0 і позначивши $u = z_1/z_0$, першу карту можна ототожнити з комплексною прямою з координатою u:

$$U_1 = \{(z_0 : z_1) \in CP^1 | z_0 \neq 0\} = \left\{(1, \frac{z_1}{z_0})\right\} = \{(1, u)\} = C.$$

Аналогічно і друга карта також ототожнюється з комплексною прямою C^1 з координатою $p = \frac{z_0}{z_1}$.

Тому проективну пряму можна представити як результат склеювання двох копій афінних прямих C^1. При цьому правило склеювання звучить так: точка першої прямої, координата якої u, приклеюється до точки другої прямої, координата якої $p = \frac{1}{u}$.

Зрозуміло, що точка з нульовою координатою ні до чого не приклеюється (див. рис. 5.1). Комплексу пряму ми зображаємо у вигляді променя – це тільки схема склейки (подібна, наприклад, кругам Ейлера), а не геометричний малюнок.

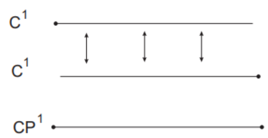

Рисунок 5.1

Можливе і таке формулювання: нехай точка x на проективній прямій потрапляє одночасно в обидві карти (такі є всі точки крім двох).

Тоді у x є дві координати u і p – з першої карти і з другої. Перехід від однієї координати до іншої задається правилом $p = \frac{1}{u}$.

n-вимірним тором називається $T^n = (\mathrm{C}\backslash\{0\})^n$.

Тобто $T^n = \{(t_0, \dots, t_{n-1}) | t_i \neq 0\}$. Елементи тора можна покоординатно перемножувати:

$$(t_0, \dots t_{n-1}) \cdot (t_0^{'}, \dots t_{n-1}^{'}) = (t_0 t_0^{'}, \dots, t_{n-1} t_{n-1}^{'}),$$

що перетворює тор у групу за множенням.

Тор T^1 діє на C^1 за правилом:

$$(t_0)(z) = t_0 \cdot z.$$

Далі, тор T^1 діє на CP^1 за правилом:

$$(t_0)(z_0 : z_1) = (t_0 \cdot z_0 : z_1).$$

Задача 5.1. Показати, що на проективній прямі є три орбіти дії тора.

1) Проективна пряма є результатом склеювання двох карт.

2) Кожна з карт скрізь щільна в CP^1.

3) Кожна з карт – афінна комплекса пряма.

4) Функції склеювання (вони ж – функції заміни координат) мають вид $p = \frac{1}{u}$, тобто є мономами Лорана.

5) Кожна з карт інваріантна при дії тора.

6) Перетин двох карт можна ототожнити з тором T^1.

7) Проективну пряму можна отримати з одновимірного тора компактифікацією, тобто приклеюванням двох точок – нуля і «нескінченності» (у системі координат, пов'язаною з першою картою). При переході до системи координат другої карти, «нуль» і «нескінченність» міняються місцями.

8) Сам тор, нуль і нескінченність – орбіти дії тора.

Задача 5.2. Показати, що на проективній прямій є інша дія тора з тими ж орбітами (майже аналогічне до задачі 5.1).

Проективна площина CP^2 є множиною всіх прямих в комплексному просторі C^3, які проходять через початок координат 0. Точка на проективній площині задається її однорідними координатами, тому має бути місце запису

$$CP^2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) | (z_0, z_1, z_2) \neq (0,0,0)\};$$
$$(z_0 : z_1 : z_2) = (\lambda z_0 : \lambda z_1 : \lambda z_2), \lambda \in C.$$

Проективна площина накривається трьома своїми підмножинами (картами):

ця карта $U_1 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in CP^2 | z_0 \neq 0\}$,

карта $U_2 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in CP^2 | z_1 \neq 0\}$

і карта $U_3 = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in CP^2 | z_2 \neq 0\}$.

Поділивши на z_0 і позначивши $u = \frac{z_1}{z_0}$, $v = \frac{z_2}{z_0}$, першу карту можна ототожнити з комплексною площиною з координатами (u, v):

$$U_1 = \left\{\left(1, \frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)\right\} = \{(1, u, v)\} = C^2.$$

Абсолютно аналогічно друга карта також ототожнюється з комплексною площиною C^1 з координатами $(p, q) = \left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}\right)$. Те ж саме і для третьої карти.

Тому проективну площину можна представити як результат склеювання трьох копій афінних площин C^2. При цьому правило склеювання таке: точка першої карти, координати якої (u, v), приклеюється до точки другої карти, координати якої $p = \frac{1}{u}$, $q = \frac{v}{u}$. Ця склейка зображена схематично на рис. 5.2.

Сформулюємо іншими словами: нехай точка x на проективній площині потрапляє одночасно в дві карти. Тоді у x є координати з першої карти та із другої. Перехід від однієї системи координат до іншої задається правилом $\left(p = \frac{1}{u}, q = \frac{v}{u}\right)$.

Двовимірний тор T^2 діє на C^2 за правилом:

$$(t_0, t_1)(z_0, z_1) = (t_0 \cdot z_0, t_1 \cdot z_1).$$

Двовимірний тор T^2 діє на CP^2 за правилом:

$$(t_0, t_1)(z_0 : z_1 : z_2) = (t_0 \cdot z_0 : t_1 \cdot z_1 : z_2).$$

Задача 5.4. Показати, що проективна площина під дією тору розпадається на сім орбіт (див. рис. 5.2).

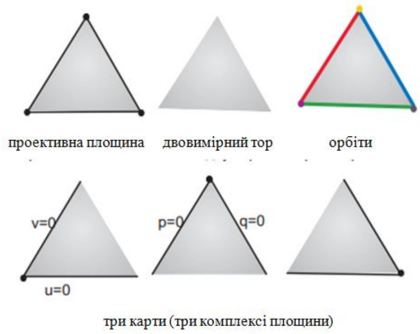

Рисунок 5.2

1) Проективна площина є результатом склеювання трьох карт.

2) Кожна із карт скрізь щільна в CP^2.

3) Кожна з карт – афінна комплексна площина.

4) Функції склеювання (функції заміни координат) мають вигляд $q = \frac{1}{u}, p = \frac{v}{u}$, тобто є мономами Лорана (тобто мономами, в яких допускаються від'ємні степені змінних).

5) Кожна з карт інваріантна при дії тора.

6) Перетин трьох карт можна ототожнити з тором T^2.

7) Проективну площину можна отримати з двовимірного тора компактифікацією, яка у даному випадку означає приклеювання трьох проективних прямих, які взаємно перетинаються. Якщо зафіксувати карту (наприклад, першу), то дві з цих прямих задаються рівнянням $u = 0$ і $v = 0$, а третя – пряма на нескінченності. При переході до системи координат іншої карти, «нулі» і «нескінчености» змінюються місцями.

8) Орбіти показані різними кольорами на рис. 5.2.

Задача 5.5. На проективній площині лежить компактна крива, яка задана рівнянням $u = v^3$ у першій карті. Яке її рівняння на другій карті?

Задача 5.6. Показати, що прямий добуток $CP^1 \times CP^1$ покривається чотирма копіями C^2. Знайти функції переходу між чотирма системами координат.

Поняття двовимірного торичного многовиду узагальнює ці три приклади ($CP^2, CP^1, CP^1 \times CP^1$):

1) будь-який торичний многовид X – результат склеювання декількох карт;

2) кожна карта – афінний торичний алгебраїчний многовид. Проте зручно уявляти собі уявляти, що кожна з карт – афінна комплекса площина. Це завжди так, якщо многовид гладкий;

3) кожна з карт скрізь щільна в X;

4) функції склеювання (функції заміни координат) є мономами Лорана;

5) на многовид X діє двовимірний тор T^2;

6) кожна з карт інваріантна при дії тора;

7) перетин всіх карт можна ототожнити з тором T^2. Воно є скрізь щільною орбітою;

8) X є компактифікацією тора T^2. Це означає, що до тора приклеюється декілька проективних прямих, які взаємно перетинаються. У кожній з карт дві з цих прямих (для кожної з карт – свої дві) задаються рівняннями типу «одна з координат дорівнює нулю, а інші в деякому розумінні знаходяться на нескінченності. При переході від однієї карти до іншої, «нулі» і «нескінченності» міняються місцями;

9) орбіти під дією тора є такими:

✓ велика орбіта, перетин всіх карт, тобто тор T^2,

✓ приклеєні до нього проективні прямі (взяті без точок взаємних перетинів),

нульвимірні орбіти – (одноточкові) перетини проективних прямих, які добавленні при компактифікації.

ТЕМА 7. Приклади просторів, які виникають під дією функторів експоненціального типу

Приклад 1. X – скінчений простір, який складається з n точок. Тоді $\exp^c X = X$. Для $k \geq n$ маємо $\exp X = \exp_k X = \exp_n X$ і простір складається з $2^n - 1$ точок (така кількість непустих підмножин n-точкової множини). Усі інші гіперсиметричні та симетричні k-степені простори X (незалежно від порівнювальної величини чисел k та n) також скінчені і складаються не більш ніж із n^k точок. В якості вправи читачу пропонують обчислити потужність множин $SP_G^k X$ для деяких конкретних груп G, наприклад групи Z_k лишків за модулем k, яка діє на X^k циклічним чином:

утворююча групи Z_k переводить набір $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ у набір $(i_2, \dots, i_k, i_1)$.

На просторі X із n точок можна впевнитися у тому, що функтори $\exp_n$ і SP^n відмінні при $n \geq 3$. Множина $\exp_n X$ складається з $2^n - 1$ точок, а множина $SP^n X$ при канонічній проекції π_n^h відображається на $\exp_n X$. Це відображення не є взаємно однозначним. Так, при $x \neq y$ у точку $\{x, y\} \in \exp_n X$ переходять принаймні дві відмінні точки $[(x, y, y, \dots, y)]$ і $[(x, x, y, \dots, y)]$.

Отже, множини $\exp_n X$ і $SP^n X$ складаються з відмінного числа точок і, отже, не гомеоморфні. Що ж стосується функторів $\exp_2$ і SP^2, то легко побачити, що вони співпадають.

Приклад 2. X – відрізок $[0, 1]$ числової прямої R. Знайдемо симетричну 2- степінь $SP^2 X = \exp_2 X$.

Для цього скористаємося тим, що функтор $\exp_2$ є фактор-функтором функтора Π^2. Відображення $\pi_2 : X^2 \to \exp_2 X$ полягає у тому, що пара точок (x, y) і (y, x) «склеюються». Склеювання це може здійснити кожен читач. Треба взяти квадратний лист паперу, який зображає одиничний квадрат площини, накреслити на ньому діагональ Δ, яка складається з точок виду (x, x), скласти квадрат уздовж цієї діагоналі аж до сполучення двох рівнобедрених прямокутних трикутників T_1 і T_2 та склеїти ці трикутники (див. рис. 7.1). Трикутник, який отримали від такого склеювання квадрату, і буде зображати 2-у симетричну степінь відрізку.

Цей результат можна отримати і по-іншому. Діагональ Δ розбиває квадрат I^2 на два симетричних трикутника T_1 і T_2:

$$T_1 = \{(x, y) \in I^2 : x \geq y\},$$
$$T_2 = \{(x, y) \in I^2 : x \leq y\}.$$

Тоді відображення π_2, обмежене тільки на трикутнику T_1, буде взаємно однозначним неперервним відображенням компакту T_1 на хаусдорфовий простір $\exp_2 I$. Таке відображення повинно бути гомеоморфізмом.

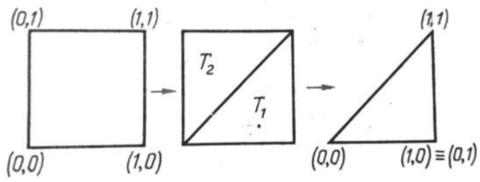

Рисунок 7.1

Отже, ми ще раз продемонстрували, що симетричний квадрат $\exp_2 I$, звісно, ототожнюється з половиною квадрату I^2.

Приклад 3. Обчислимо континуальну експоненту відрізка.

Кожний континуум відрізка $[0, 1]$ – це відрізок $[t_1, t_2]$: або невироджений $(t_1 \neq t_2)$, або той, що породжується у точку $t_1 = t_2$. При цьому відрізок $[t_1, t_2]$ однозначно визначається своїми кінцями t_1 і t_2 незалежно від того, в якому порядку ми їх беремо.

Отже, як множина континуальна експонента $\exp^c I$ природно ототожнюється із симетричним квадратом $\exp_2 I$. Читачу легко впевнитися у тому, що відстань у метриці Хаусдорфа між відрізками $[t_1, t_2]$ і $[t_1', t_2']$ дорівнює

$$\max\{|t_1 - t_1'|, |t_2 - t_2'|\},$$

що, у свою чергу, дорівнює відстані у метриці Хаусдорфа між точками $\{t_1, t_2\}$ і $\{t_1', t_2'\}$ симетричного квадрату $\exp_2 I$.

Отже, компакти $\exp_2 I$ і $\exp^c I$ топологічно співпадають.

Приклад 4. Знайдемо симетричну n-степінь відрізка $SP^n I$.

У стандартному n-вимірному кубі I^n розглянемо множину

$$T = \{(x_1, \dots, x_n) \in I^n : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n\}.$$

Множина T представляє собою узагальнену піраміду, так званий n-вимірний симплекс. При $n = 3$ це трикутна піраміда, яка зображена на рис. 7.2.

Розглянемо обмеження $\pi_n^s \mid T$ відображення π_n^s на симплекс T. Із того, що у границях класу еквівалентності $[(x_1, \dots, x_n)] \in SP^n I$ ми можемо розставляти координати точок у будь-якому порядку, випливає рівність

$$\pi_n^s(T) = SP^n I.$$

Тепер покажемо, що відображення $\pi_n^s \mid T$ взаємно однозначне. Нехай $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, \dots, y_n)$ дві відмінні точки із T. Припустимо, що s – найменший номер координати, за яким точки x та y відмінні. Тоді

$x_1 = y_1, \dots, x_{s-1} = y_{s-1}$ і нехай, наприклад, $x_s < y_s$. У цьому випадку ми бачимо, що число координат точки y, яке не перевершує x_s, дорівнює $s - 1$, а відповідне число для точки x – не менше s. Тому точки x та y симетрично не еквівалентні, оскільки симетрично еквівалентні точки мають однакові з урахуванням кратності набори координат.

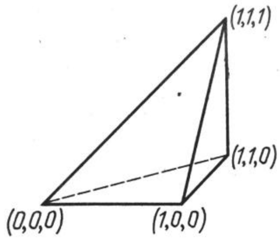

Рисунок 7.2

Таким чином, відображення $\pi_n^s\colon T \to SP^n I$ є гомеоморфізмом як неперервне взаємне однозначне відображення компакту T на хаусдорфовий простір.

Отже, симетрична n-степінь відрізку гомеоморфна n-вимірному симплексу.

Приклад 5. Застосуємо попереднє міркування про кратність координат симетрично еквівалентних точок для обчислення симетричної n-степені двохвимірної сфери S^2.

Тут, на відмінну від попередніх випадків, наші міркування не будуть абсолютно строгими. Скоріше за все це буде натяк, який допоможе зрозуміти остаточний результат. Ототожнимо сферу S^2 із розширеною комплексною площиною C^*. Тоді елементи $SP^n S^2$ – це набори n комплексних чисел (серед яких можуть бути числа, що дорівнюють ∞), які визначенні з точністю до перестановок, тобто набори, які визначені значеннями і кратністю чисел, що у них входять. Кожний такий набір $(z_1, .., z_n)$ визначає клас ξ пропорційних многочленів g із комплексними коефіцієнтами, коренями якого є числа $z_1, \dots, z_n$. Навпаки, кожний клас ξ пропорційних многочленів g степені n визначає набір коренів $z_1, \dots, z_n$. Відношення між класами ξ пропорційних многочленів степені $\leq n$ і наборами чисел $(z_1, \dots, z_n)$ із розширеної комплексної площини стає взаємно однозначним, якщо ми приймемо наступну угоду: коренями многочлену $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$ степені $k \leq n$ є, крім його звичайних k комплексних коренів $z_1, \dots, z_k$, число ∞ з кратністю $n - k$.

Множина ж класів ξ пропорційних многочленів степені $\leq n$ – це множина класів пропорціональних ненульових наборів з $n+1$ комплексних чисел, тобто n-вимірний комплексний проективний простір CP^n. Оскільки коефіцієнти многочлена неперервно залежать від його коренів (є многочленами його коренів), взаємно однозначне відображення $SP^nS^2 \to CP^n$ неперервне і, отже, є гомеоморфізмом.

Приклад 6. Отже, компакт SP^nS^2 гомеоморфний CP^n, тобто є многовидом і, більш того, має структуру комплексного многовиду. Використовуючи те, що SP^nS^2 є многовидом, можна показати, що многовидом буде і будь-яка G-симетрична степінь $SP_G^nM^2$ будь-якого двовимірного многовиду.

У той же час при $n \geq 3$ гіперсиметрична степінь $\exp_n M^2$ не буде навіть многовидом із краєм ні для якого двовимірного многовиду M^2 (нагадаємо, що $\exp_2 = SP^2$). Продемонструємо це для випадку, коли $n = 3$.

Якщо $\exp_3 M^2$ – многовид, то многовид цей шестивимірний. Насправді, $\exp_3 M^2$ є неперервним образом шестивимірного компакту $M^2 \times M^2 \times M^2$ при скінченократному відображенні π_3. А з теорії розмірності відомо, що скінчено кратні відображення компактів не понижують розмірність. Більш того, якщо $x,\ y,\ z$ – відмінні точки многовиду M^2, то відображення $\pi_3\colon (M^2)^3 \to \exp_3 M^2$ є локальним гомеоморфізмом у точці (x, y, z), тобто гомеоморфно відображає деякий окіл точки (x, y, z) на окіл точки $\{x, y, z\} \in \exp_3 M^2$.

Але шестивимірні многовиди локально гомеоморфні евклідовому простору R^6. А n-вимірний евклідовий простір R^n володіє тією властивістю, що ніяку його зв'язну відкриту підмножину U неможна розбити множиною розмірності $\leq n-2$, тобто неможна знайти таку множину F розмірності $\dim F \leq n-2$, доповнення $U \setminus F$ до якого є сумою двох непустих відкритих множин, які не перетинаються.

Отже, ми прийдемо до протиріччя з тим, що $\exp_3 2$ є шестивимірним многовидом, якщо вкажемо таку його зв'язну множину U, яку можна розбити множиною розмірності 4.

Візьмемо відмінні точки $x, y \in M^2$ та їх відкриті околи U_1, U_2, які не перетинаються, гомеоморфні відкритому кругу D^2. В якості зв'язної відкритої множини $U \in \exp_3 M^2$ візьмемо базисний окіл $O\langle U_1, U_2\rangle$ точки $\{x, y\} \in \exp_3 M^2$. Елементами множини U можуть бути двохточкові і трьохточкові підмножини многовиду M^2. Відповідно множину U зображають у вигляді суми трьох підмножин F, V_1 і V_2, які попарно не перетинаються, де

$$F = \{\{x_1, y_1\}: x_1 \in U_1, y_1 \in U_2\},$$

$$V_1 = \{\{x_1, x_2, y_1\}: x_1, x_2 \in U_1, y_1 \in U_2, x_1 \neq x_2\},$$

$$V_2 = \{\{x_1, y_1, y_2\}: x_1 \in U_1, y_1, y_2 \in U_2, y_1 \neq y_2\}.$$

Множина V_1 відкрита. Насправді, якщо взяти околи W_1, W_2, W_3, які не перетинаються, точок x_1, x_2, y_1 відповідно так, що W_1, $W_2 \subset U_1$, $W_3 \subset U_2$, маємо

$$\{x_1, x_2, y_1\} \in O\langle W_1, W_2, W_3\rangle \subset V_1.$$

Так само перевіряється відкритість множини V_2. Множина F чотиривимірна, оскільки гомеоморфна добутку $U_1 \times U_2$ двох кругів. Отже, чотиривимірна множина F розбиває відкриту множину U у суму відкритих множин V_1 і V_2, які не перетинаються.

Залишилось перевірити зв'язність множини U. Легко побачити, що множина $V_1 \cup F$ гомеоморфна добутку $(\exp_2 U_1) \times U_2$. Множина $\exp_2 U_1$ зв'язна як неперервний образ добутку $U_1 \times U_1$ зв'язних множин.

Отже, множина $V_1 \cup F$ зв'язна як добуток зв'язних множин $\exp_2 U_1$ і U_2. Аналогічним чином зв'язна і множина $F \cup V_2$. Але тоді зв'язна і їх сума U , оскільки ці множини перетинаються.

Приклад 7. Покажемо, що симетричний квадрат кола $SP^2S^1 = \exp_2 S^1$ гомеоморфний стрічці Мебіуса.

Нагадаємо, що стрічка Мебіуса отримується з квадрату, якщо ототожнити центрально симетричні точки двох протилежних його сторін. Так, якщо в якості квадрату взяти одиничний квадрат площини

$$I^2 = \{(x, y): 0 \le x, y \le 1\},$$

то ототожнюються пари точок $(0, y)$ і $(1, 1 \to y)$ (див. рис. 7.3).

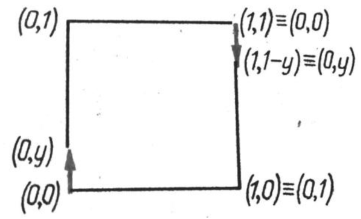

Рисунок 7.3

Одним із самих цікавих топологічних властивостей стрічки Мебіуса є те, що він представляє собою односторонню (неорієнтовану) поверхню. Локально, у кожній своїй точці стрічка Мебіуса має дві сторони. Але якщо в якомусь місці ви почнете замальовувати одну зі сторін стрічки Мебіуса в якийсь колір, то, продовжуючи цей процес неперервно, ви замалюєте у цей колір всю стрічку Мебіуса. Цікаво зауважити, що якщо за аналогією з стрічкою Мебіуса ви склеїте таку ж смужку стрічки, перевернувши один з її кінців двічі, то ви отримаєте хоча і перекручену, але двохсторонню поверхню. Поверхня ця гомеоморфна циліндру (смужці, яка склеєна без якихось перекручувань) і відрізняється від звичайного циліндру тільки своїм розташуванням у трьохвимірному евклідовому просторі.

Отже, чому компакт $\exp_2 S^1$ гомеоморфний стрічці Мебіуса? Коло S^1 являє собою відрізок з ототожненими кінцями. Відповідно квадрат кола – тор – отримується із звичайного квадрату ототожненням пар протилежних, однаково направлених його сторін (див. рис. 7.4).

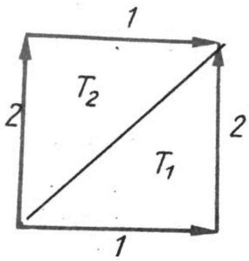

Рисунок 7.4

Відображення $\pi_2 : S^1 \times S^1 \to \exp_2 S^1$, як і в прикладі 2, ототожнює верхній трикутник T_2 квадрату, який зображує тор на рис. 7.4, із його нижнім трикутником T_1. При цьому верхня сторона 1 ототожнюється із правою стороною 2, а ліва сторона 2 – із нижньою стороною 1.

Таким чином, компакт $\exp_2 S^1$ отримується з прямокутного трикутника T_1, катети якого ототожнені способом, який зображений на рис. 7.5. Ми покажемо, що склеєний таким чином трикутник співпадає зі стрічкою Мебіуса, спочатку розрізавши цей трикутник, а потім склеївши у другій послідовності. Розріжемо трикутник T_1 за висотою, яка опущена з прямого кута на гіпотенузу, і задамо нумерацію і направлення сторін двом отриманим трикутникам T_1^1 і T_1^2, склейка яких дає шуканий компакт $\exp_2 S^1$ (див. рис. 7.6).

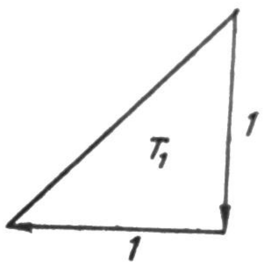

Рисунок 7.5

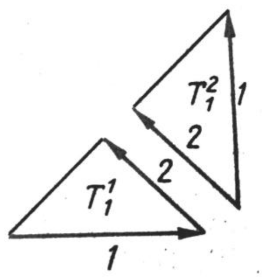

Рисунок 4.6

Тепер ми склеїмо сторони 1 трикутників T_1^1 і T_1^2. Поєднати ці сторони рухом у площині, не накладаючи трикутники один на один, неможна. Тому перевернемо трикутник T_1^1, відобразивши його відносно сторони 1 рухом перевернутого трикутника T_1^1 у площині (див. рис. 7.7). Після склеювання сторін 1 ми отримаємо квадрат, у якого залишається склеїти пару протилежних сторін 2, які направленні у різні сторони. Цим і завершується доведення гомеоморфності стрічки Мебіуса, яка симетрична квадрату кола.

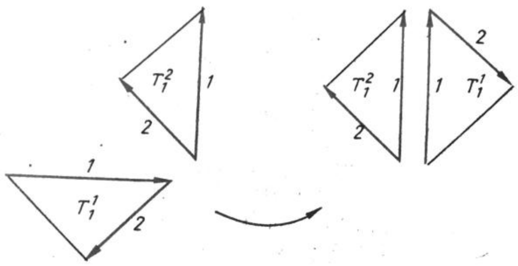

Рисунок 7.7

Приклад 8. Тепер обчислимо континуальну експоненту $\exp^c S^1$ кола.

Підконтинуумами кола є її дуги (у тому числі і нульової довжини) і саме коло. Але на відмінну від підконтинуумів відрізку (приклад 3) будь-яка пара точок x_1, x_2 кола S^1 визначає пару взаємно додаткових дуг, кінцями яких є точки x_1 і x_2.

Побудуємо гомеоморфізм r круга B^2 на $\exp^c S^1$. Центру круга B^2 поставимо у відповідність найбільший підконтинуум кола S^1, тобто це саме коло. Нехай тепер точка $x \in B^2$ віддалена від центра на відстань $a > 0$. Проведемо через точку x радіус R_x круга B^2, кінець якого позначимо через $\varphi(x)$. Тепер поставимо у відповідність точці x дугу кола S^1 довжиною $2\pi(1-a)$ із центром у точці $\varphi(x)$ (див. рис. 4.8) . Легко побачити, що таке побудоване відображення $r: B^2 \to \exp^c S^1$ неперервне й взаємно однозначне, тобто є гомеоморфізмом.

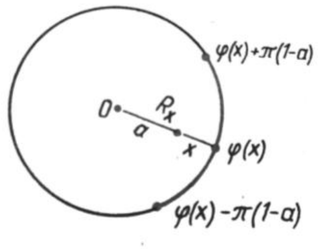

Рисунок 7.8

Гомеоморфізм r володіє тією властивістю, що точки кола S^1 він залишає на місці, тобто його можна розглядати як багатозначну ретракцію круга B^2 на його межу S^1. Ця конструкція припускає природне узагальнення на більш високі розмірності (для будь-якого натурального n існує багатозначна ретракція $r: B^{n+1} \to S^n$) і грає важливу роль у геометричній топології. Тут ми показуємо, що у силу теореми Брауера про нерухому точку, однозначної ретракції $B^{n+1} \to S^n$ не існує.

Приклад 9. Гіперсиметрична степінь $\exp_3 S^1$ гомеоморфна тривимірній сфері S^3. Це – відома теорема Ботта. Вона є досить тонким результатом і не допускає елементарного доведення, яке можна було би тут навести. Цей з першого погляду частинний результат має цікаві додатки.