МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ КОМП’ЮТЕРНИХ НАУК, ФІЗИКИ ТА МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Теорема Ферма: нерозв’язані питання

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка 4 курсу

Спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійної програми «Середня освіта (Математика)»

Ковальчук Ольга Олександрівна

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор

Савченко Олександр Григорович

Рецензент кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонского філіалу Національного університету кораблебудування імені адмирала Макарова

Штанько Олександр Дмитрович

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП 3
РОЗДІЛ 1. Від теореми Ферма до наших днів 5
1.1 Діофантові рівняння 5
1.2 Історія доведення теореми Ферма 10
1.3 Гіпотеза Ейлера 14
Розділ 2. Теорема Ферма у шкільній математиці 25
2.1 Про доведення Ферма для $n = 4$ 25
2.2 Метод нескінченного спуску у задачах 26
ВИСНОВКИ 31
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 33

ВСТУП

Актуальність. Основні державні документи, які характеризують сучасний стан вітчизняної математичної освіти, вказують на її важливість у сучасному житті. Чинна шкільна програма з математики для 5-9 класах наголошує на важливості розвитку особистості учня, формування загальної культури, свідомості,творчого стилю мислення, дослідницьких навичок та саморозвитку.

Курс математики у 5-9 класах дає можливість учням розширювати та доповнювати свої знання. Основна мета курсу це формування здатності застосовувати свої знання у суміжних предметах та у повсякденному житті.

Математика є царицею наук, універсальною мовою науки і техніки. Вона розширює знання про світ, ставить перед собою майже нерозв'язні проблеми. Однією з таких проблем є Велика теорема Ферма, яка хвилювала, хвилює і буде хвилювати математиків.

Дослідженням цієї проблеми понад триста років займалися математики всього світу, серед яких: Л. Ейлер, Е. Кумер, Й. Дирихле, Г. Ламе, Е. Уайлз, Д. Гільберг, Ю. Таніяма, П. Рібенбойм, М. Постніков, Г.Едвардс.

Нарешті, більш ніж через три століття, теорему вдалося довести для загального випадку. Проте невирішеними залишились питання пов'язані з рівнянням виду: $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{n-1}^n + x_n^n = a^n$.
Актуальність та невирішені питання слугують вибором даної теми.

Об'єкт дослідження: Велика теорема Ферма , гіпотеза Ейлера та пов'язані з ними питання.

Предмет дослідження: систематизація та узагальнення контрприкладів до гіпотези висунутої Ейлером, можливість застосування деяких аспектів порушеної проблеми у шкільному курсі математики.

Мета роботи: з'ясувати питання, які залишилися невирішеними після доведення Великої теореми Ферма.

Об'єкт, предмет та мета дослідження дозволили сформулювати такі **завдання:**

1. Проаналізувати наукову літературу пов'язану з Великою теоремою Ферма та гіпотезою Ейлера.
2. Проілюструвати можливості пошуку розв'язків діофантового рівняння виду $x^2 + y^2 = z^2$, в рамках шкільного курсу математики, з використанням елементів аналітичної геометрії.
3. Використання ідей доведення теореми для випадку $n = 4$ у шкільних завданнях та математичних олімпіадах.

РОЗДІЛ 1

Від теореми Ферма до наших днів

1.1 Діофантові рівняння

Десята проблема Гільберта є однією з найдавніших областей математики – розв’язання алгебраїчних рівнянь з цілими коефіцієнтами в цілих числах. Ці рівняння називают діофантовими на честь грецького математика Діофанта, який розглядав деякі з цих рівнянь.

Ось, як формулював цю проблему Гільберт:

«10. Розв’язаня проблеми розв'язання для довільного діофантового рівняння.

Нехай дано довільне діофантове рівняння з довільній числом невідомих і з цілими раціональними коефіцієнтами; потрібно вказати загальний метод, завдяки якому можна було б в кінцеве число кроків дізнатися, має дане рівняння розв’язок в цілих раціональних числах чи ні» (Александров П. С.) [1].

Фундаментальна праця L. E. Dickson, «History of the Theory of Numbers» т. 2, «Діофантові рівняння», дає уявлення про те, який інтерес відчували математики всіх часів до розв’язання діофантових рівнянь.

Цілочисельними розв’язками алгебраїчних рівнянь цікавилися ще античні математики; наприклад, пов’язане з теоремою Піфагора рівняння $x^2 + y^2 = z^2$; Евклід (III ст. до н. е.) наводить формули, що дозволяють знайти всі цілочисельні розв’язки цього рівняння. Окремі види рівнянь і систем рівнянь другого степеня з двома невідомими розглядав Діофант (III ст. н. е.). Наприклад, він розглянув рівняння $ax^2 + bx + c = y^2$ і розв’язав його для деяких випадків.

В епоху розвитку аналізу діафантові рівняння привертали увагу видатних вчених. Ферма, Ейлера, Лагранжа, Гаусса, які внесли свій внесок в теорію діофантових рівнянь.

Зокрема, Ферма висунув знамениту гіпотезу про те, що рівняння

$x^n + y^n = z^n$ при $n \geq 3$ не має цілочисельних розв'язків. Найбільшого успіху домігся Лагранж. Завдяки працям Ферма, Вайлса, Ейлера та інших вчених математиків, Лаграняжу (1768 г.) вдалося повністю дослідити питання про знаходженяння цілочисельних розв'язків будь-якого рівняння другого степеня з двома невідомими. Пізніше інший виклад результату Лагранжа дав Гаусс.

У XIX ст. різні вчені робили спроби розв'язання діофантових рівнянь степеня вище другого, зокрема, в зв'язку з проблемою Ферма . Однак скільки-небудь загальних результатів тут отримано не було; розглядалися лише окремі види рівнянь, для розння окремих видів рівнянь, для рішення котрих вигадали спеціальний прийом. Мабуть, і сам Гільберт намагався знайти підходи до розв'язання діофантових рівнянь.

Таким чином, незважаючи на зусилля багатьох поколінь математиків, проблема роззв'язання діофантових рівнянь залишалася відкритою. Разом з тим було ясно, що просування в цій області неминуче пов'язане з створенням глибоких теорій, значення яких, мабуть, не обмежувалася б тільки діофантовими рівняннями (класичний приклад: дослідження Куммера з проблеми Ферма, що призвели його до важливого поняття ідеалу). У цьому, можливо, одна з причин, що спонукали Гільберта включити проблему діофантових рівнянь в число найбільш важливих проблем, які XIX ст. залишило двадцятому. Таким чином, якщо розглядати задум Гільберта досить широко, то десятою проблемою Гільберт націлював математиків на дослідження діафантових рівнянь.

Що стосується формулювання цієї проблеми, даної самим Гільбертом, то тут треба сказати наступне. Гільберт вимагав відшукання «загального методу» для розв'язання діофантових рівнянь. Мабуть, він вважав, що такий метод рано чи пізно буде знайдений; в принципі такий метод існує, треба тільки його знайти. Питання про те, що такого методу взагалі не існує, за часів Гільберта навряд чи міг виникнути: точне поняття алгоритм з'явилося в математиці пізніше. Тепер точне поняття алгоритм є предметом вивчення нової галузі математики - теорії алгоритмів. Разом з уточненням поняття алгорифм з'явилася принципова можливість розглядати питання про неіснування алгоритму, що володіють певними властивостями. Наразі розвиваються методи доведення теорем про неможливість тих чи інших алгоритмів. Є приклади масових математичних проблем, для яких неможливі алгоритми, шукані в цих проблемах. «Загальний метод», про який говорить Гільберт, ми тепер розуміємо як алгоритм (Александров П. С.) [1]. Якщо підійти до проблеми Гільберта з алгоритмічної точки зору, то її можна сформулювати так: «Чи існує спосіб, такий що з вигляду рівняння, за його коефіцієнтами з'ясувати, чи має це рівняння розв'язок у цілих числах » (Болюбах А. А.) [4]. Тобто він хотів з'ясувати чи існує загальний алгоритм за яким можна з'ясувати чи має рівняння цілочисельні розв'язки. Звісно можливий, як позитивний (побудова алгоритму), так і негативний (доведення неможливості алгоритму) розв'язок цієї проблеми. В часи Гільберта, як зазначено вище, точного поняття алгоритму не існувало, і мова могла йти тільки про позитивне розв'язання цієї проблеми (Александров П. С.) [1].

Нехай дано рівність $x^n + y^n = z^n$, де $n = 1$ і x, y, z – цілі ненульові числа.

Зрозуміло, що будь-які цілі ненульові x, y будуть задовольняти цю рівність.

Наприклад числа $x = 2$ і $y = 3$, $z = 5$, або $x = 7$ і $y = 6$, $z = 13$ і т.д.

Збільшимо наше n на 1 і отримаємо рівність $x^2 + y^2 = z^2$. Цей вираз є давно відомим завдяки працям Піфагора та його знаменитій теоремі.

Його доведення є широко відомим, не потребує складних математичних операцій та може бути розглянуте на уроках математики у школі.

Числа x^2, y^2, z^2 утворюють піфагорову трійку. Знаходженням цих трійок займалися ще Евклід, Діофант, Піфагор та інші вчені математики.

Зрозуміло трійка чисел (x, y, z) – піфагорова трійка, для будь-якого натурального k трійка натуральних чисел (kx, ky, kz) будуть піфагоровими трійками. Зокрема, (6, 8, 10), (9, 12, 15) і т.д. є піфагоровими трійками. Трійка піфагорових чисел, яка має спільний дільник не більше 1 називається примітивною. Знайдемо найпростіші піфагорові трійки.

Доведення

Нехай, є рівняння

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{1.1}$$

розділимо обидві частини рівності на c^2 маємо,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \tag{1.2}$$

введемо заміну $\frac{a}{c} = x, \frac{b}{c} = y$,

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{1.3}$$

Ця рівність, є нічим іншим, як рівнянням кола і пара x, y лежать на колі:

Припустимо що рівняння 1.1 має розв’язок, тоді розділивши його на c^2 отримаємо рівняння 1.2 та з підстановки 1.3 отримаємо деяку точку на колі у якої будуть раціональні координати.

Тобто задача знаходження наших трійок зводиться до задачі знаходження всіх раціональних точок кола.

Візьмемо точку (0;-1) та проведемо через неї пряму яка проходить через точку $(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$.

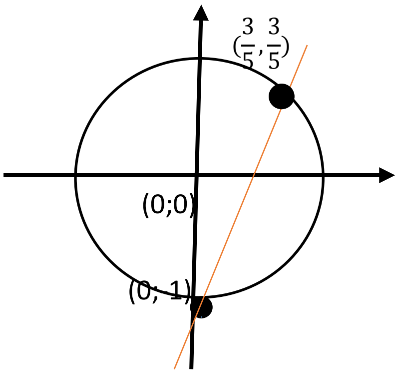

Рисунок 1.1 - Одиничне коло

Рівняння цієї прямої, має вигляд

$$y = kx - 1. \tag{1.4}$$

З того, що $(x, y) \epsilon Q$ то і $k \epsilon Q$.

Підставимо рівність 1.4 у рівність 1.3, отримаємо

$$x^2 + (kx - 1)^2 = 1,$$

$$x^2 + k^2x^2 = 2kx,$$

$$x + k^2x = 2k,$$

$$x = \frac{2k}{1 + k^2},$$

$$y = kx - 1 = \frac{2k^2}{1 + k^2} - 1 = \frac{k^2 - 1}{1 + k^2}.$$

Звідси, будь-яка раціональна точка кола має вигляд

$$\left(\frac{2k^2}{1 + k^2}, \frac{k^2 - 1}{1 + k^2}\right), \text{де } k \epsilon Q.$$

Нехай $k = \frac{m}{n}$, тоді

$$x = \frac{2\left(\frac{m}{n}\right)^2}{1 + (\frac{m}{n})^2} = \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

$$y = \frac{(\frac{m}{n})^2 - 1}{(\frac{m}{n})^2 + 1} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$

звідси

$$a = 2mn,$$

$$b = m^2 - n^2,$$

$$c = m^2 + n^2.$$

Що й треба було довести.

1.2 Історія доведення теореми Ферма

Випадок $n = 3$, у своїй праці довів Леонард Ейлер.

У своєму доведенні Останьої теореми Ферма при $n = 3$ Ейлер застосовує метод нескінченного спуску, що належить Ферма. Він показує, що якщо можна знайти додатні цілі числа x, y, z, що задовольняють рівняння $x^3 + y^3 = z^3$, то існують менші додатні цілі числа з тими ж властивостями; таким чином, в разі розв’язання цього рівняння можна було б знайти спадаючу нескінченну послідовність таких трійок цілих додатніх чисел. Зрозуміло, що такої послідовності не існує. Звідси, не можна знайти таких чисел x, y, z (Эдвардс Г) [21].

У результаті критичного вивчення доведення Ейлера, було знайдено неточність, пов’язаний з діленням цілих чисел виду $a^2 + 3b^2$.

У своїй статті 1760 року Ейлер строго довів, що якщо непарне, взаємно просте число p ділить $a^2 + 3b^2$ (де a і b – відмінні від нуля взаємно прості цілі числа), то існують цілі u, v, такі що, $p = \mathrm{u}^2 + 3v^2$.

Тим паче, Ейлер не довів лему повністю, а вона є необхідною для доведення головного твердження. На сторінках своєї книги (1808, 1803) Лежандр наводить доведення Ейлера без доведень деталей судження до кінця.

У 1875 році вийшла громіздка стаття Папена, присвячена числам $a + b\sqrt{-c}$. Автор розглядає судження, котрі не були достатньо обґрунтовані Ейлером, коли він розглядав числа вигляду $a^2 + cb^2$, у випадку при $c = 1, 2, 3, 4, 7$. Шумахер (1894) у явному вигляді відзначив відсутню частину у судженнях. В 1901 році Ландау запропонував строге доведення; ту ж ціль мала і стаття Холдена (1906), а в 1915 році детальне доведення знову було наведено у книзі Кармайкла. В 1966 році Бергман опублікував статтю, в котрій піддав доведення Ейлера історичному розгляду і ретельному аналізу. Далі, в 1972 році Лежандр вказав, що судження Ейлера недосконалі (Рибенбойм П) [16].

Доведення для $n = 4$ було знайдено у паперах Ферма. Цей випадок теореми єдиний, який допускає елементарне доведення. Тут Ферма використав метод нескінченного спуску, який винайшом під час доведення теореми (Постников М. М.) [15].

Формулювання теореми стало відомим широкій математичный публіці тільки в 1670 році, коли один з синів Ферма перевидав в Тулузі діофантову «Арифметику», включивши в видання 48 приміток, зроблених його батьком на полях книги. Простота формулювання і заява про існування справді дивовижного доведення - відразу привернули увагу до гіпотези Ферма багатьох математиків, як професіоналів і аматорів. Однак всі спроби довести відразу загальний випадок були марні [19].

І хоча математики просувалися дуже повільно, ситуація складалася далеко не так погано, як могло б здатися на перший погляд. Виявилося, що доведення для випадку $n = 4$ залишається в силі при $n = 8, 12, 16, 20,$ .... Справа в тому, що будь-яке число, представимое у вигляді 8-го (а також 12- го, 16- го, 20- го, ...) степеня деякого числа, представимо і у вигляді 4-го степеня якогось іншого цілого числа. Отже, будь-яке доведення, яке «працює» для 4-го степеня, залишається в силі для 8-го і будь-якого іншого степеня, кратного 4. На основі того ж принципу можна стверджувати , що ейлерівьске доведенняз для $n = 3$ автоматично діє для $n = 6, 9, 12, 15, \ldots$.Тим самим Велика теорема Ферма втратила свій неприступний вигляд і виявилася вірною відразу для багатьох чисел n.

Особливо цінним було доведення при $n = 3$, тому що число 3 - приклад так званого простого числа. Просте число володіє тією властивістю, що воно не кратне жодному цілому числу, крім 1 і самого себе. Крім уже названого числа 3 простими також є числа 5, 7, 11, 13, ... Всі інші числа кратні простим називаються складеними числами. Ті, хто займається теорією чисел, вважають прості числа найбільш важливими тому, що ті представляють собою якби атоми чисел. Прості числа - «цеглинки», з яких побудовані всі інші числа, оскільки ті можна отримати як твори різних комбінацій простих чисел. Здавалося б, ця обставина відкриває шлях до вирішення проблеми Ферма. Щоб довести Велику теорему Ферма при всіх значеннях n, досить довести її для простих значень n. У всіх інших випадках числа n кратні простим числам, і доведення випливає з уже розглянутих випадків (Сингх С.) [17].

Інтуїтивно, це надзвичайно спрощує проблему, з того, що дає можливість виключити з розгляду всі значення n, які не є простими числами. Різко скорочується число рівнянь. Наприклад, при значеннях n до 20 доведення слід провести тільки для шести рівнянь:

$$x^5 + y^5 = z^5,$$
$$x^7 + y^7 = z^7,$$
$$x^{11} + y^{11} = z^{11},$$
$$x^{13} + y^{13} = z^{13},$$
$$x^{17} + y^{17} = z^{17},$$
$$x^{19} + y^{19} = z^{19}.$$

Якби кому-небудь вдалося довести Велику теорему Ферма для одних лише простих значень n, то вона виявилася б доведеною для всіх значень n. Цілих чисел нескінченно багато, прості ж числа становлять лише їх незначну частину [14].

Випадок для $n = 5$ був вперше розглянутий Дирихле. В 1825 році його стаття була представленв в Парижській академії наук, але доведення опубліковане в 1828 році, не охопило всі можливі випадки. До того часу, як Лежандр опублікував повне незалежне доведення, Дирихле вже обґрунував останній нерозібраний випадок. (Рибенбойм П) [16].

Остання теорема Ферма для п'ятих степенів розпадається наступним чином на два випадки. Якщо x, y, z - такі попарно взаємно прості додатні числа, що $x^5 + y^5 = z^5$, то одне з них має ділитися на 5. З іншого боку, одне з цих трьох чисел, очевидно, має ділитися на 2, інакше дана нерівність являла би непарне число у вигляді суми двох непарних чисел (Эдвардс Г) [21].

Француз Габріель Ламе вніс свій вклад у 1839 році, довів теорему при $n = 7$. З 1837 року Великою теоремою Ферма займався німецький математик Єрнст Куммер, довівши справедливість для всіх простих $n < 100$, за виключенням 37, 59, 67, так званих нерегулярних простих чисел.

Ключовою подією для знаходження доведення теореми Ферма в загальному випадку стала висунута в 1955 році одна гіпотеза. Молодий японський математик Ютака Таніяма стверджував, що кожній еліптичній кривій відповідає відповідна модулярна форма.

Дана гіпотеза отримала назву «гіпотеза Таніями-Шимури». Як наслідок було доведено, що Велика теорема – це наслідок даної гіпотези. Тепер від доведення теореми Ферма математиків відділяла лише одна перепона – доведення гіпотези Таніями-Шимури (Кураева А.В.) [8].

В 2016 році президент Норвезької Академії наук і літератури Олі Сейерстед заявив, що Абелівської премії - однієї з найбільших премій з математики - удостоївся математик Ендрю Уайлс, що довів Велику теорему Ферма.

Своїм доведенням професор Оксфордського університету Ендрю Уайлс «відкрив нову еру в теорії чисел».

Велику теорему Ферма можна назвати однією з найбільш знаменитих математичних теорем в історії. Відповідно до цієї теореми, для будь-якого числа $n \geq 3$ рівняння $a^n + b^n = c^n$ не має розв'язків, якщо a, b і c - цілі ненульові числа. Незважаючи на те, що теорема виглядає дуже просто і була висунута ще в XVII столітті, більше трьох століть жодному вченому не вдавалося її довести [6].

У 1993 році Уайлз оприлюднив свої міркування на конференції Кембриджського університету, але у подальшому з'ясувался що у його доведені були знайдені пробіли. На усунення яких у вченого пішло більше року. Остаточне доведення теореми було опубліковане у 1995 році Уайлсом у співпраці з Тейлором (Соловьёв Ю.) [18].

1.3 Гіпотеза Ейлера

Гіпотеза: рівняння $a_1^n + \cdots + a_k^n = b^n, k > 2, n \in N$ має розв'язок в цілих додатніх числах.

Ця гіпотеза є певним узагальненням Великої теореми Ферма з неї можна виділити три випадки гіпотези.

Випадок 1: рівняння $a_1^n + \cdots + a_k^n = b^n$ має розв'язок в натуральних числах при $k < n$. Виявилося, що Леонард Ейлер в 1772 р висунув гіпотезу, що $a_1^n + \cdots + a_{n-1}^n = b^n$ не имеет розв'язків в натуральных числах.

Ця гіпотеза справедлива для $n = 3$ в силу ВТФ.

В 1966 г. Л. Ландер, Т. Паркін і Дж. Селфридж знайшли перший контрприклад для n = 5:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

В 1986 році Н. Елкіс знайшов контрприклад для $n = 4$

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

В 1988 г. Р. Фрай знайшов найменший контрприклад для $n = 4$:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Випадок 2: рівняння $a_1^n + \cdots + a_k^n = b^n$ має розв'язання в натуральних числах при будь-якому $k = n$.

Для $n = 2$ ця гіпотеза справедлива (теорема Піфагора).

Для рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ було знайдено наступний розв'язок.

Припустимо, що

$$a = x, b = x + q,$$

$$c = x + p, d = x + d$$

$$x^3 + (x + q)^3 + (x + p)^3 = (x + d)^3$$

$$x^3 + x^3 + 3x^2q + 3xq^2 + q^3 + x^3 + 3x^2p + 3xp^2 + p^3 = x^3 + 3x^2d + 3xd^2 + d^3$$

$$2x^3 + 3x^2 \cdot (q + p - d) + 3x \cdot (q^2 + p^2 - d^2) + (q^3 + p^3 - d^3) = 0$$

де q, p, d – натуральні числа, $q < p < d$.

Таблиця 1.1

Значення q, p, d		Кількість цілих коренів
З яких	По які	
1,2,3	1,2,100	1
1,3,5	1,3,100	1
1,4,5	1,4,100	0
1,5,7	1,5,100	0
1,7,8	1,7,100	0
1,6,7	1,6,100	0
1,8,9	1,8,100	0

Продовження табл 1.1

Значення q, p, d		Кількість цілих коренів
З яких	По які	
1,9,10	1,9,100	0
1,10,11	1,10,100	0
1,11,12	1,11,100	0
1,12,13	1,12,100	0
1,13,14	1,13,100	0

На проміжку від 1, 2, 3 до 1, 2, 100 був один цілий розв'язок рівняння при

$$q = 1, p = 2, d = 3:$$

$$a = x, b = x + 1,$$

$$c = x + 2, d = x + 3$$

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 3)^3 = (x + 3)^3$$

$$x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \, 2x^3 + 15x + 9 - 27x - 27$$
$$= 0$$

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Серед дільників вільного члена знайдений корінь рівняння $x = 3$. Розділивши рівняння на $(x - 3)$, отримаємо

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 3) = 0:$$

$$x - 3 = 0 \text{ або } x^2 + 3x + 3 = 0$$

З того, що ми шукаємо розв'язок в натуральних числах то тут є один корінь: $x = 3$.

Знайдемо значення a, b, c, d:

$$a = 3, b = 4, c = 5, d = 6.$$

Розв'язок $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ в натуральних числах має вигляд

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3,$$

з того, що $(a, b, c, d) = 1$, то ця четвірка є примітивною. Множенням основ цього розв'язку на $\lambda \neq 0$, отримаємо множину інших розв'язків. Наприклад: для $\lambda = 2$ маємо розв'язок $6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$,

де $q = 2, p = 4, d = 6$.

На проміжку від 1, 3, 4 до 1, 3, 100 було знайдено однин цілий розв'язок рівняння при $q = 1, p = 3, d = 10$:

$$a = x, b = x + 1,$$

$$c = x + 3, d = x + 10$$

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 3)^3 = (x + 10)^3$$

$$2x^3 + 3x^2 \cdot (1 + 3 - 10) + 3x \cdot (1^2 + 3^2 - 10^2) + (13^2 + 3^3 - 10^3) = 0$$

$$2x^3 - 18x^2 - 90x - 972 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 - 45x - 486 = 0.$$

Оскільки шуканий розв'язок знаходиться в натуральних числах, то тут є один корінь $x = 18$.

Знайдемо значення a, b, c, d:

$$a = 18, b = 19, c = 21, d = 28.$$

Розв'яжемо рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ в натуральных числахмає вигляд:

$$18^3 + 19^3 + 21^3 = 28^3,$$

оскільки, $(a, b, c, d) = 1$, то ця четвірка є примітивною.

Таблица 1.2

Значення q, p, d		Кількість цілих коренів
З яких	По які	
2,3,4	2,3,100	0
2,4,5	2,4,100	0
2,5,6	2,5,100	1
2,6,7	2,6,100	0

Продовження табл. 1.2

Значення q, p, d		Кількість цілих коренів
З яких	По які	
2,7,8	2,7,100	0
2,8,9	2,8,100	0
2,9,10	2,9,100	0
2,10,11	2,10,100	0
2,11,12	2,11,100	0
2,12,13	2,12,100	0

На проміжку від 2, 5, 6 до 2, 5, 112 було знайдено один цілий розв'язок рівняння при^

$$q = 2, p = 5, d = 45:$$

$$a = x, b = x + 2,$$

$$c = x + 5, d = x + 45$$

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 3)^3 = (x + 45)^3$$

$$2x^3 + 3x^2(2 + 5 - 45) + 3x(2^2 + 5^2 - 45^2) + (2^3 + 5^3 - 45^3) = 0$$

$$2x^3 - 38x^2 - 1996x - 90992 = 0$$

$$x^3 - 19x^2 - 998x - 45496 = 0.$$

Оскільки шуканий розв'язок знаходиться в натуральних числах, то тут є один корінь $x = 94$.

Знайдемо значення a, b, c, d:

$$a = 94, b = 96, c = 99, d = 139.$$

Розв'язок рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ в натуральних числах має вигляд:

$$94^3 + 96^3 + 96^3 = 139^3,$$

Оскільки $(a, b, c, d) = 1$, то ця четвірка є примітивною.

У проміжку від 2, 8, 9 до 2, 8, 100 було знайдене одне раціональне рішення рівняння: $x = \frac{11}{2},\ q = 2, p = 8, d = 9.$

Ці значення помножимо на 2, отримаємо:

$$x = 11, q = 4, p = 16, d = 18$$

$$a = x, b = x + 4,$$

$$c = x + 16, d = x + 18.$$

Знайдемо значення a, b, c, d:

$$a = 11, b = 15, c = 27, d = 29.$$

Розв’язок рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$в натуральних числах має вигляд:

$$11^3 + 15^3 + 27^3 = 29^3$$

оскільки $(a, b, c, d) = 1$, то ця четвірка є примітивною.

Таблиця 1.3

Значення q, p, d		Кількість цілих коренів
З яких	По які	
3,4,5	3,4,100	0
3,5,6	3,5,100	0
3,6,7	3,6,100	0
3,7,8	3,7,100	0
3,8,9	3,8,100	0
3,9,10	3,9,100	0
3, 10, 11	3, 10, 100	1

На проміжку від 3,10,11 до 3,10,100 було знайдено один цілий розв'язок рівняння при $q = 3, p = 10, d = 19$:

$$a = x, b = x + 3,$$

$$c = x + 10, d = x + 19$$

$$x^3 + (x + 3)^3 + (x + 10)^3 = (x + 19)^3$$

$$2x^3 + 3x^2 \cdot (3 + 10 - 19) + 3x \cdot (32 + 102 - 192) + (3^3 + 10^3 - 19^3) = 0$$

$$2x^3 - 6x^2 - 252x - 5832 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 126x - 2916 = 0.$$

Оскільки шуканий розв’язок знаходиться в натуральних числах, то тут є один корінь $x = 27$.

Знайдемо значення a, b, c, d:

$$a = 27, b = 30, c = 37, d = 46.$$

Розв’язок рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$в натуральних числах має вигляд:

$$27^3 + 30^3 + 37^3 = 46^3,$$

так як. $(a, b, c, d) = 1$, то ця четвірка є примітивною.

Цікаво, що на підставі розглянутих вище прикладів по аналогії з піфагоровими трійками, нами була висунута гіпотеза, що одна з складових рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, де a, b, c, d − натуральні числа, повинна бути кратна трьом [13].

Однак, в статті Б.Т. Федосова «Теорема Ферма очима інженера» був знайдений контрприклад:

$$7^3 + 14^3 + 17^3 = 20^3$$ [20].

Таким чином, знаходження доданків $n - x$ степенів, сума яких дорівнює n - му степеню, зводиться до розв’язання рівнянь виду:

$$x^n + (x + a)^n + (x + b)^n = (x + c)^n$$

і

$$y^n + (y + p)^n + (y + q)^n + (y + u)^n = (y + v)^n$$

Тобто до розв’язоку наступних рівнянь:

$$(n-1)x^n + C_n^1 x^{n-1}(a^1 + b^1 - c^1) + \cdots + C_n^k x^{n-k}(a^k + b^k - c^k) + \cdots + C_n^n x^{n-n}(a^n + b^n - c^n) = 0.$$

і

$$
\begin{aligned}
(n-1)y^n + C_n^1 y^{n-1}(p^1 + \ q^1 + u^1 - \ v^1) + \cdots \\
+ C_n^k y^{n-k}(p^k + \ q^k + u^k - \ k) + \cdots \\
+ C_n^n y^{n-n}(p^n + \ q^n + u^n - \ v^n) = 0,
\end{aligned}
$$

для n = 4 справедливий наступний приклад:

$$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4.$$

Для великих степенів питання залишається відкритим.

Випадок 3: $a_1^n + \cdots + a_k^n = b^n$ при $k > 2, n < k$ дане рівняння завжди має роз'язки в натуральних числах.

Випадок 3.1: Маючи хоча б одну піфагорову трійку, можна отримати будь-яку кількість квадратів, сума яких дорівнює квадрату.

Нехай $a^2 + b^2 = c^2$ - числа Піфагора. Домножимо цей вираз на c^2, отримаємо:

$$a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2 = c^2 \cdot c^2.$$

Оскільки $a^2 + b^2 = c^2$ - числа піфагора, один із співмножників c^2 розкладемо на суму двох квадратів:

$$a^2 \cdot (a^2 + b^2) + (b \cdot c)\, 2 = (c^2)\, ^2.$$

Продовжуючи цей процес, ми можемо отримати будь-яку кількість квадратів, сума яких дорівнює квадрату.

Приклад 1**.**

Нехай $3^2 + 4^2 = 5^2$ - числа піфагора. Домножимо даний вираз на 5^2, отримаємо: $3^2 \cdot 5^2 + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$.

Замінивши одну 5^2 на суму квадратів, отримаємо:

$$3^2 \cdot (3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2$$

$$(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 5)^2 = (5^2)^2.$$

Перемноживши множники в дужках, отримаємо:

$9^2 + 12^2 + 20^2 = 25^2$ - три доданки. Розклавши два множники 5^2 на суму квадратів, отримаємо:

$$3^2 \cdot (3^2 + 4^2) + 4^2 \cdot (3^2 + 4^2) = 5^2 \cdot 5^2$$

$$(3 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 4)^2 + (4 \cdot 3)^2 + (4 \cdot 4)^2 = (5^2)^2.$$

Перемножимо множники в дужках і отримаємо суму чотирьох квадратів дорівнює квадрату:

$$9^2 + 12^2 + 12^2 + 16^2 = 25^2.$$

Продовжуючи цей процес, ми можемо отримати будь-яку кількість квадратів, сума яких дорівнює квадрату.

Приклад 2.

У таблиці піфагорових трійок знайдемо пифагорову трійку, складові якої кратні значенням суми інших піфагорових трійок:

$$60^2 + 91^2 = 109^2.$$

Розкладемо складові на множники, один з яких можна розкласти в піфагорову трійку:

$$(12 \cdot 5)^2 + (7 \cdot 13)^2 = 109^2.$$

Замінимо один із співмножників двох доданків (при бажанні одного) на суму двох квадратів, отримаємо:

$$(12 \cdot (3^2 + 4^2))^2 + (7 \cdot (5^2 + 12^2))^2 = 109^2$$

Розкриємо дужки:

$$12^2 \cdot 3^2 + 12^2 \cdot 4^2 + 7^2 \cdot 5^2 + 7^2 \cdot 12^2 = 109^2$$

$$36^2 + 48^2 + 35^2 + 84^2 = 109^2.$$

Домножимо даний вираз на квадрат, який можна розкласти на суму двох квадратів, можна продовжити цей процес і отримати будь-яку кількість квадратів, сума яких дорівнює квадрату.

Випадок 3.2: Якщо є $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, і $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = q^3$, то можна отримати будь-яку кількість кубів, сума яких дорівнює кубу, тобто :

$$a_1^3 + \cdots + a_k^3 = b^3,$$

де $k > 2$.

Домножимо рівняння $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, на d^3 отримаємо:

$$d^3 \cdot a^3 + d^3 \cdot b^3 + d^3 \cdot c^3 = d^3 \cdot d^3.$$

Так як $d^3 = a^3 + b^3 + c^3$, то один із співмножників d^3 можна розкласти на суму кубів

$$a^3 \cdot (a^3 + b^3 + c^3) + d^3 \cdot b^3 + d^3 \cdot c^3 = (d^2)^3 .$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо непарна кількість кубів, сума яких дорівнює кубу. домножимо рівняння

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = q^3$$

на d^3 і отримаємо парну кількість кубів, сума яких дорівнює кубу.

Приклад

Нехай $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Домножим дане рівняння на 6^3, отримаємо:

$$6^3 \cdot 3^3 + 4^3 \cdot 6^3 + 6^3 \cdot 5^3 = 6^3 \cdot 6^3.$$

Тепер розкладемо першу 6^3 в даному рівнянні на суму трьох кубів $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, отримаємо:

$$(3^3 + 4^3 + 5^3) \cdot 3^3 + 4^3 \cdot 6^3 + 6^3 \cdot 5^3 = (6^2)^3$$

$$(3 \cdot 3)^3 + (4 \cdot 3)^3 + (5 \cdot 3)^3 + (4 \cdot 6)^3 + (5 \cdot 6)^3 = (6^2)^3$$

$$9^3 + 12^3 + 15^3 + 24^3 + 30^3 = 36^3,$$

тобто з суми трьох кубів отримали суму п'яти кубів, яка дорівнює кубу.

Нехай $1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3$, домножимо дане рівняння на 6^3, отримаємо:

$$6^3 + 6^3 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + 6^3 \cdot 12^3 = 13^3 \cdot 6^3.$$

Тепер розклавши першу 6^3 в даному рівнянні на суму трьох кубів $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, отримаємо:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \cdot 5^3 + 6^3 \cdot 7^3 + 6^3 \cdot 12^3 = 13^3 \cdot 6^3$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 30^3 + 42^3 + 72^3 = 78^3,$$

тобто з суми чотирьох кубів одержали суму шести кубів, яка дорівнює кубу.

Очевидно, що замінюючи одне з доданків, помножених на 6^3, на суму трьох кубів можна отримати як парну, так і непарну кількість доданків.

Аналогічним способом можна отримати будь-яку кількість доданків в n-их степенях, сума яких також є n - степенем деякого числа. Для цього достатньо мати хоча б одне розв'язання наступних рівнянь:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n = b^n \text{ и } c_1^n + c_2^n + c_3^n + c_4^n = d^n \text{ [13].}$$

Отже, можна зробити висновок, що у період від Ферма до Уайлса, математики пройшли довгий шлях до розгадки Великої теореми Ферма.

Проте досі є відкритим питання чи є у рівнянь виду:

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n = a^n,$$

розв'язки у натуральних числах для всіх $n \geq 5$. Адже ні доведення цієї гіпотези, ні спростування досі не знайшли.

Розділ 2

Теорема Ферма у шкільній математиці

2.1 Про доведення Ферма для $n = 4$

Доведення теореми для $n = 4$, є єдиним випадком доведення теореми, при якому використовують виключно елементарні математичні дії

Для доведення цього випадку Ферма використовував метод знаходження піфагорових трійок та метод нескінченного спуску (Эдвардс Г.) [21].

Про метод знаходження піфагорових трійок докладно розповідається у пункті 1.1. Та, що ж представляє собою метод нескінченного спуску?

Метод був винайдений самим Ферма під час доведення випадку при $n = 4$.

Метод нескінченного спуску – це метод доведення від протилежного, заснований на тому, що безліч натуральних чисел є цілком впорядкованими. Часто цей метод використовують для доведення того, що у деякого рівняння немає розв’язків. З припущення, що рівняння існує, випливає існування іншого розв’язку. Тоді можна побудувати нескінченний ланцюг розв’язань, кожний з яких менший від попереднього. Це викликає протиріччя в тому що в будь-якій підмножині множини натуральних чисел є мінімальний елемент, отже припущення про існування початкового розв’язку невірне [11].

У шкільних олімпіадних задачах досить часто зустрічаються рівняння в цілих числах або діафантові рівняння. Для розв’язання деяких таких рівнянь використовують метод нескінченного спуску винайдений П’єром Ферма .

2.2 Метод нескінченного спуску у задачах

Прикладом завдання із застосуванням методу нескінченного, є задача представлена на олімпіаді для учнів 8 класу:

Знайти всі остачі, котрі може давати четвертий степінь цілого числа при ділені на 16.

Розв'язання:

Знайдемо всі можливі остачі при діленні четвертого степеня цілого числа n на 16. Якщо число n парне, тобто якщо $n = 2k$, то $n^4 = 16k^4$, тому залишок при діленні на 16 дорівнює нулю. Якщо ж число n непарне, то $n^4 - 1 = (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1)$ ділиться на 16, оскільки всі три вирази в дужках парні, причому перше або друге з них кратне 4. Отже, четверта стнепінь будь-якого цілого числа при діленні на 16 дає залишок 0 або 1.

Розглянемо ліву і праву частини рівності. Якщо числа x, y, z парні, число t також має бути парним. Нехай тепер хоча б одне з чисел x, y, z непарне. Тоді ліва частина при діленні на 16 може давати тільки остачу $3{,}5{,}7, 3 + 5 = 8, 3 + 7 = 10, 5 + 7 = 12, 3 + 5 + 7 = 15$, а права - тільки остачі 0 і 11, тому рівність неможлива. Тут застосовується, те що при додаванні, значення остач складаються, причому в нашому випадку перевищення найбільшого можливого значення остачі - 15 – не відбувається. Отже, видно, що якщо рівність $3x^4 + 5y^4 + 7z^4 = 11t^4$ виконується, то всі числа x, y, z, t повинні бути парними.

Припустимо, що існує хоча б одна четвірка натуральних чисел, що задовольняє цій рівності, і розглянемо всі такі четвірки. У кожній з них можна вибрати найбільше з чотирьох що входять до неї чисел. Випишемо ці найбільші числа в ряд і виберемо з них найменше. Нехай x, y, z, t - будь-яка четвірка, в якій найбільше з чисел дорівнює обраному числу. Як показано вище, всі числа x, y, z, t парні, тому $x = 2x_1$, $y = 2y_1, z = 2z_1, t = 2t_1$, де числа x_1, y_1, z_1, t_1 - теж натуральні.

Підставивши вирази старих чисел через нові в рівність $3x^4 + 5y^4 + 7z^4 = 11t^4$ 4 і скоротивши на 16, отримуємо рівність $3x_1^4 + 5y_1^4 + 7z_1^4 = 11t^4$. Отже, четвірка x_1, y_1, z_1, t_1 також задовольняє даній рівності, але її найбільше число в два рази менше найбільшого числа четвірки x, y, z, t, що суперечить вибору цієї четвірки.

Розв’язання даної задачі засноване на двох ідеях. Перша – це використання арифметики остач по відповідному модулю (у даному випадку це 16). Друга, це і є метод нескінченного спуску.

При розв’язанні завдання модуль 16 був вибраний не випадково. По-перше, він зручний при переборі варіантів, так як четверті степені за модулем 16 мають тільки дві остачі. А по-друге, підрахунок числа варіантів показує, що ліва частина рівняння по модулю 16 має не більше 8 значень, що дає шанс довести відсутність ненульових розв’язків. Обчислення всіх можливих остач, проведене в розв’язанні, показує, що таких розв’язків дійсно немає, причому в правій частини замість множника 1,1 могло б стояти будь-яке чисел: 6, 9, 13, 14. Коефіцієнти в лівій частині рівняння також можна було б замінити на інші числа (але не на будь-які). Найпростіший вибір коефіцієнтів, при якому подібна задача не має розв’язків, приводить до рівняння

$$x^4 + y^4 + z^4 = 4t^4$$

Звичайно, рівняння Ферма $x^4 + y^4 = z^4$ ще простіше, але воно, очевидно, має розв’язок за модулем 16, а саме $0^4 + 1^4 = 1^4$ (Тому доведення Ферма було більш складним, ніж розв’язання розглянутого завдання) (Бегунц А. В., Гашков С. Б., Горяшин Д.В. Косухин О. Н., Флёров А.А.) [3].

Ще одним прикладом на використання методу нескінченного спуску в олімпіадних завданнях є наступна задача.

Знайти в натуральних числах всі розв’язки рівняння

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Розв'язання

Зрозуміло, що $x_1 = 3, y_1 = 2$, є розв'язком рівняння. Доведемо, якщо пара чисел $x, y -$ розв'язок рівняння, тоді пара $(3x + 4y), (2x + 3y)$ – також є розв'язком рівняння. Це припущення виходить з тотожності

$$(3x + 4y)^2 - (2x + 3y) = x^2 - 2y^2.$$

Далі підставимо значення $x_1 = 3,\ y_1 = 2$ у тотожність і отримаємо наступні розв'язки

$$x_2 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17,$$

$$y_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12,$$

$$x_3 = 99, y_3 = 70, \text{ і так далі.}$$

Тож, отримано нескінчену послідовність розв'язків $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3; \ldots$

Доведемо, що інших чисел що задовольняють рівняння не існує.

Нехай $x, y -$ деякий розв'язок рівняння. Тоді $(3x - 4y), (2x - 3y)$ – також є розв'язком рівняння. Це припущення виходить з тотожності

$$(3x - 4y)^2 - (2x - 3y) = x^2 - 2y^2.$$

З умови $9 = 9x^2 - 18y^2 > -2y^2$ випливає, що $3x > 4y$, а при $y > 2$ з умови $4 = 4x^2 - 8y^2 < y^2$, виходить що $3y > 2x$. Тобто якщо $y > 2$ з розв'язку x, y ми отримаємо розв'язок x', y' в натуральних числах,до того ж $x' < x,\ y' < y$. З того що цей процес не може продовжуватися нескінченно (в будь-якій непорожній множині натуральних чисел є найменший елемент), тоді далі ми отримаємо $x^{(n)},\ y^{(n)}$, де $y^{(n)} \leq 2$. З отриманого вище $y^{(n)}$, не може бути рівним 1, тоді $y^{(n)} - 2$. Отже $x^{(n)} = 3$.

Це означає, що x, y належать побудованій раніше послідовності [10].

Шкільний курс алгебри у 8 класі передбачає вивчення теми «Дійсні числа», тут учням вводять поняття ірраціонального числа. У підручнику з алгебра для поглибленого вивчення математики автора Мерзляк поняття ірраціональності вводиться на прикладі доведення нераціональності числа $\sqrt{2}$ (Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) [9].

Дане доведення можна провести методом нескінченного спуску.

Доведення

Нехай число $\sqrt{2}$ – раціональне число: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, для натуральних m та n. Тоді квадрат числа $\sqrt{2}$ рівний $2 = \frac{m^2}{n^2}$, тобто $2n^2 = m^2$,отже число m – парне і дорівнює $m = 2k$, звідси $m^2 = 2^2k^2 = 4k^2$, $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$, отже n – парне. Тоді, дріб $\frac{m}{n}$,, є скоротним на 2, припускалося, що дріб є раціональним, а отже нескоротним. Припущення привело до протиріччя, отже число $\sqrt{2}$ не є раціональним (Бевз Г. П.) [2].

У 7 класі під час вивчення теми «Цілі вирази», коли учні вже опанували формули скороченого множення, можна запропонувати, як завдання підвищеної складності наступний приклад [12].

Довести, що сума квадратів двох непарних чисел, не може бути квадратом парного числа.

Доведення

Подамо суму квадратів непарних чисел у вигляді виразу

$$(2n + 1)^2 + (2k + 1)^2 = (2t)^2,$$

де $(2n + 1), (2k + 1)$ – непарні числа, $2t$ – парне число.

Розкриємо дужки

$$4n^2 + 4n + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 4t^2,$$

$$4 \cdot (n^2 + n + k^2 + k) + 2 = 4t^2.$$

Отже, у правій частині отримали парне число, яке при ділені на чотири дає остачу 0. При діленні лівої частини рівняння на 4 отримаємо остачу 2. Тоді права і ліва частина виразу не є рівними, а отже сума квадратів двох непарних чисел не може дорівнювати квадрату парного числа [7].

ВИСНОВКИ

Математика є досить важливою у розумінні сучасних технологій та сучасної науки. Вивчаючи математику, людина спроможна розширити свій кругозір, навчитися критично мислити та застосовувати свої знання у різних ситуаціях.

При виконанні дослідження всі поставленні завдання були виконані і мета досягнута. Проведене дослідження дозволяє зробити такі висновки.

1. Аналіз наукової літератури теми засвідчив, що першим зрушенням у історії доведення Великої теореми Ферма, стала робота Леонарда Ейлера. У 1760 він довів теорему для випадку $n = 3$. Доведення теореми для випадку $n = 4$ представив сам Ферма. Далі випадок для $n = 5$ у 1825 році був доведений Дирихле,, а випадок $n = 7$ у 1839 році Ламелем. Куммер довів теорему для простих $n < 100$. Нарешті у 1995 Ендрю Уайлсом було представлене повне вичерпне доведення Великої теореми Ферма.
2. Серед розмаїття проблем теореми Ферма, опираючись на поняття: рівняння прямої, одиничне коло, примітивний набір чисел, формули скороченого множення та поняття раціональності, в учнів є можливість проілюструвати пошук доведень діофантового рівняння рівняння виду $x^2 + y^2 = z^2$, не виходячи за рамки шкільного курсу математики.
3. Виходячи з вікових особливостей учнів 5-9 класів, вивчення теореми Ферма для загального випадку є неможливим.

Проте, використаний Ферма, метод нескінченного спуску, для доведення випадку при $n = 4$, досить часто використовують у шкільних завданнях на доведення існування розв’язків рівняння та їх пошуку. Означення самого методу у шкільній літературі не надається., проте під час вивчення ірраціональних чисел, в неявному вигляді, без означень структури методу, учнів знайомлять з доведенням ірраціональності числа $\sqrt{2}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П. С. Проблемы Гильберта. М. : Наука, 1969. 240 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. Закладів / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. К. : Освіта, 2016. 254 с.
3. Бегунц А. В., Гашков С. Б., Горяшин Д.В. Косухин О. Н., Флёров А.А. Московские математические олимпиады 1981-1992 г. М.: МЦНМО, 2017.
4. Болюбах А. А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя) / А. А. Болюбах. М. : МЦНМО, 1999. 24 с.
5. Британский математик доказал теорему Ферма и получит Абелевскую премию.

URL: https://www.mk.ru/science/2016/03/15/britanskiy-matematik-dokazal-teoremu-ferma-i-poluchit-abelevskuyu-premiyu.html.

6. Гипотеза Эйлера.

URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гипотеза_Эйлера.

7. Задачи.

URL: https://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=30396.

8. Кураева А. В. ИСТОРИЯ ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА / А. В. Кураева.
9. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підруч. для 8 кл. з поглибленим вивченням математики. Х. : Гімназія, 2016. 384 с.
10. Метод бесконечного спуска.

URL:http://kvant.mccme.ru/1978/01/metod_beskonechnogo_spuska.htm.

11. Метод нескінченного спуску.

URL: https://znaimo.com.ua/Метод_нескінченного_спуску

12. Навчальна програма з математики для загальноосвітніх навчальних закладів з математики для 5-9 класів.

URL:https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas.

13. ОБОБЩЕНИЯ ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА: ОТ ФЕРМА И ЭЙЛЕРА ДО КУММЕРА / Г. С.Адильбекова, Т. А. Ермакова, А. П. Катунина, Б. Н. Демисенов. 2017. №4.

14. Позор математики.
URL: http://www.ega-math.narod.ru/Singh/ch3.htm.

15. Постников М. М. Введение в теорію алгебраических чисел. М. : Наука, 1982. 240 с.

16. Рибенбойм П. Последняя теорема Ферма для любителей: М.: Мир, 2003. 429с.

17. Сингх С. Великая теорема Ферма. М. :МЦНМО, 2000. 288 с.

18. Соловьёв Ю. Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма / Ю. Соловьёв.

19. Солон Б. Я. Краткая история Великой теоремы Ферма от ее возникновения до ее счастливого завершения.
URL:http://math.ivanovo.ac.ru/school/solon/history_ferma.pdf.

20. Федосов Б. Т. Теорема Ферма глазами инженера.
URL:https://studylib.ru/doc/2018141/teorema-ferma-glazami-inzhenera.-nekotorye.

21. Эдвардс, Г. Последняя теорема Ферма [Текст]. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел М. : Мир, 1980. 486 с.