МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет комп'ютерних наук фізики та математики

Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

ІРРАЦІОНАЛЬНІСТЬ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ ЧИСЕЛ

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка 4 курсу

Спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

Освітньо-професійної програми "Середня освіта (Математика)"

Барболіна Анна Сергіївна

Керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Савченко О. Г.

Рецензент: докторка педагогічних наук, кандидатка фізико-математичних наук, професорка Літвінова М. Б.

Херсон – 2021

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Дана тема є актуальною через те, що її вивчення безпосередньо впливає на формування наукового світогляду особистості, дозволяє осмислити, закріпити та поглибити знання про ірраціональні числа, отримані зі шкільного курсу математики, сформувати явлення про трансцендентні числа, поглянувши на множину дійних чисел під різними кутами.

Доцільність цієї роботи підкреслює ще й те, що вивчення теми «Ірраціональні числа» бере початок в школі. Від того, як здобувач освіти засвоїть цей матеріал залежить, чи виникнуть у нього труднощі у вивченні математики надалі. Проте вивчення ірраціональних чисел в середній школі є досить слабкою стороною навчального процесу через складність цього питання з теоретичної точки зору та не достатню чіткість викладу навчального матеріалу в підручниках.

Вивченням ірраціональності та трансцендентності деяких чисел займалися такі вчені-математики, як Ж. Ліувіль, Ш. Ерміт, К. Ліндеман, О. Кузьмін та багато інших. Великий внесок в розвиток теорії трансцендентних чисел зробив математик О. Гельфонд, який сформулював та довів теорему, яка є розв’язком однієї з найскладніших проблем, висунутих німецьким математиком Д. Гільбертом у своїй славнозвісній доповіді для Міжнародного математичного конгресу в Парижі у 1900 році.

Незважаючи на те, що дослідженням множини трансцендентних чисел займалося безліч великих математиків, про неї відомо досить мало. Актуальність даного питання слугувала причиною вибору даної теми.

Мета дослідження. Дослідити множину дійсних чисел на предмет ірраціональності та трансцендентності деяких чисел.

Завдання дослідження.

1. Розглянути та розібрати навчальну літературу, з якою мають справу здобувачі середньої освіти під час вивчення множини ірраціональних чисел в шкільному курсі математики.
2. Проаналізувати дослідження математиків щодо ірраціональних та трансцендентних чисел.

Об’єкт дослідження. Множина дійсних чисел.

Предмет дослідження. Множини раціональних та ірраціональних, а також алгебраїчних та трансцендентних чисел.

Методи дослідження: аналіз джерел інформації з теми «Ірраціональність та трансцендентність деяких чисел».

РОЗДІЛ 1
ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

1.1 Аналіз шкільних програм з математики щодо вивчення ірраціональних чисел в середній школі

Вивчення теми «Ірраціональні числа» розпочинається у 8 класі в межах теми «Квадратні корені. Дійсні числа». На цьому етапі навчання здобувач освіти вже «наводить приклади раціональних чисел, ірраціональних чисел; пояснює, що таке: раціональне число, ірраціональне число, дійсне число» [13]. Також вони вміють розв'язувати вправи, що передбачають застосування поняття арифметичного квадратного кореня з числа. Шкільний курс математики не передбачає глибокого вивчення проблеми ірраціональних чисел. Здобувачі освіти не розв'язують ірраціональні рівняння та нерівності, але у ході вивчення інших тем використовують ірраціональні числа без глибокого дослідження їхнього походження та властивостей.

Програма ж з математики 10 класу профільного рівня включає в себе ці питання більш детально. Здобувач освіти може не лише оперувати означеннями, що стосуються множини дійсних чисел, а й «розв'язує ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами; застосовує властивості функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей» [12].

Були спроби включили до шкільного курсу математики теорії ірраціональних чисел Мере-Кантора, Вейєрштрасса, Дедекінда. Проте ці спроби зазнали краху. «Розгорнута формальна теорія ірраціональних чисел виявилася такою, що не відповідає ні потребам, ні можливостям школярів. Тому і зараз зовсім не постає питання якихось теорій ірраціональних чисел в середній школі. Разом з тим, деякий мінімум грамотності у відношенні ірраціональних чисел для середньої школи є абсолютно обов'язковим» [20].

За словами Фіхтенгольца, цим мінімумом є: «Створення у школярів ясного уявлення про ірраціональне число і про його роль в алгебрі та геометрії. Це цілком здійсненно і в той же час достатньо для цілей, які може ставити середня школа» [20].

Вивчаючи теми шкільного курсу математики, пов'язані з ірраціональними числами, вчителі часто стикаються з випадками упередженого ставлення учнів до цих чисел. Воно полягає в тому, що школярі не сприймають ірраціональні числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ тощо саме як числа, не знають, що робити з ними в ході подальшого розв'язання певної задачі, намагаються позбутися кореня, добуваючи його наближене значення за допомогою калькулятора. Отримавши наближені значення цих чисел, здобувачі освіти забувають писати знак наближеної рівності.

Крім того, розв'язуючи геометричні задачі, зазвичай, учні замінюють число π його наближеним числовим значенням, ускладнюючи процес обчислення. Слід звернути увагу учнів на те, що подібну заміну необхідно здійснювати лише в задачах прикладного характеру.

Одним з найголовніших завдань, які постають перед вчителем під час розгляду ірраціональних чисел на уроках математики, є подолання «страху» учнів перед такими числами. Вчителеві необхідно допомогти здобувачам освіти позбутися хибної думки про те, що відповідь у вигляді ірраціонального числа є помилковою або неостаточною, підкреслити право на існування та необхідність таких чисел.

Зважаючи на все вищезазначене, для створення у здобувачів освіти уявлення про ірраціональні числа, доцільно розпочати їх розгляд одночасно і в курсі алгебри, і в курсі геометрії основної школи.

Підходящим для цього є 8 клас: одразу після знайомства учнів із поняттям «арифметичного квадратного кореня» в курсі алгебри та перед темою про вимірювання величин в курсі геометрії.

1.2 Ірраціональні числа в курсі алгебри середньої школи

Обов’язково, перед тим, як розпочати формування в учнів поняття «ірраціональне число» необхідно нагадати їм, які числа називають раціональними, запропонувати навести приклади раціональних чисел, обрати, серед запропонованих вчителем раціональні.

У підручнику алгебри 8 класу авторів Мерзляка, Полонського, Якіра пропонується вводити поняття «ірраціональне число», розглядаючи приклад рівняння

$$x^2 - 2 = 0.$$

Його коренями є числа: $\sqrt{2}$ та $-\sqrt{2}$. Цей приклад дає змогу зрозуміти учням, що «дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини Q» [9].

Для систематизації навчального матеріалу краще використати схему, що наочно продемонструє здобувачам освіти зв'язок між числовими множинами. Ця схема оперує числовими множинами, відомими учням у 8 класі (Рисунок 1).

Рисунок 1. Множина дійсних чисел.

У підручнику алгебри 8 класу авторів Кравчука, Підручної, Янченка пропонується введення поняття «ірраціональне число» на прикладі розв’язання задачі про знаходження довжини діагоналі квадрата зі стороною 1. Також у підручнику наводиться така властивість натурального числа: «якщо натуральне число n не є точним квадратом, то числа $\sqrt{n}$ і $-\sqrt{n}$ є ірраціональними» [8].

Також наводяться приклади ірраціональних чисел, таких як π, а також число 0,6060060006000…, в якому кількість нулів між шістками збільшується на 1 кожного наступного разу.

Об'єднавши знання з курсу алгебри та геометрії, досить легко наштовхнути здобувачів освіти на думку, що раціональних чисел не достатньо для подальшого вивчення математики, наприклад, запропонувавши їм добути арифметичний квадратний корінь із числа 2.

Для того, щоб переконати учнів у неможливості добути арифметичний квадратний корінь із числа 2 звичним чином слід навести їм достатньо просте доведення ірраціональності числа $\sqrt{2}$.

Те, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним було встановлено учнем Піфагора – Геппасом. Учень Піфагора розглядав квадрат, площа якого дорівнює чотирьом умовним одиницям. Власне, довжина сторони квадрата становила 2 умовні одиниці. Цей квадрат було поділено на чотири рівні квадрати, у яких сторони дорівнювали по одній умовній одиниці. В кожному квадраті Геппас провів по одній діагоналі так, щоб ці діагоналі утворили всередині великого квадрата малий. Не складно, застосувавши теорему Піфагора до одиничного квадрата, переконатися в тому, що діагональ кожного такого квадрата дорівнюватиме $\sqrt{1^2+1^2}$, тобто $\sqrt{2}$. Довжина сторін малого квадрата, утвореного діагоналями великого, дорівнюватиме $\sqrt{2}$. Піфагорійці помітили, що це число представити у вигляді відношення цілого числа до натурального неможливо, тобто це число не є раціональним. Так і виникло поняття ірраціонального числа.

Запропоноване учням доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що число $\sqrt{2}$ – це раціональне число. Це означає, що його можна записати у вигляді відношення деякого цілого числа до натурального. Візьмемо числа m і n такі, що не мають спільних дільників. Запишемо:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

$$\sqrt{2}n = m.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$$2n^2 = m^2.$$

Ліва частина рівності завжди буде числом парним. З цього можна зробити висновок, що число m – парне. Отже, число m можна представити у вигляді добутку 2 і деякого числа k. Підставимо до нашої рівності і тримаємо:

$$2n^2 = (2k)^2;$$

$$2n^2 = 4k^2;$$

$$n^2 = 2k^2.$$

Аналізуючи цю рівність, ми можемо зробити висновок про те, що число n є парним числом. Тож, маємо, що числа n і m обидва парні. А це означає, що дріб буде скоротним. А це суперечить нашому припущенню. Тож, число $\sqrt{2}$ не може бути раціональним.

Аналогічно можна довести ірраціональність числа $\sqrt{3}$. Як і у випадку з числом $\sqrt{2}$, треба скористатися властивістю подільності, але на число 3. Число, що націло ділиться на 3 завжди має вигляд $3n$, а те, що не ділиться – або $3n + 1$, або $3n + 2$. Зауважимо, що квадрат цілого числа націло ділиться на 3 тільки у випадку, коли саме число ділиться на 3. Тобто:

$$(3n)^2 = 9n^2 = 3(3n^2)$$

$$(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1$$

$$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1.$$

Якщо число $\sqrt{3}$ раціональне, то справедлива рівність

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q},$$

де p і q – цілі числа. Як і у випадку доведення числа $\sqrt{2}$ припустимо, що дріб $\frac{p}{q}$ є нескоротним. Піднесемо обидві частини рівності до квадрату:

$$3 = \frac{p^2}{q^2};$$

$$p^2 = 3q^2.$$

Тобто, число q^2 ділиться на 3, а отже число q – також ділиться на 3. Таким чином, як q ділиться на 3, аналогічно доводиться подільність числа p. Це означає, що наше припущення про нескоротність дробу хибне, а тому це число не можна представити у вигляді дробу. Тож, $\sqrt{3}$ – ірраціональне.

Використовуючи одночасно подільність цілих чисел на 2 і на 3 можна аналогічним чином довести ірраціональність числа $\sqrt{6}$.

Ці доведення є посильними і досить цікавими для учнів. Після того, як вони наочно переконаються у тому, що числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ неможливо представити у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$ з цілим числом m у чисельнику та натуральним n у знаменнику. Можна зробити висновок про те, що ті числа, якими вони послуговувалися до цього не можуть задовольнити потреби алгебри [15].

Для того, щоб зацікавити учнів, можна запропонувати їм відповісти на запитання, чи можна, піднісши ірраціональне число до ірраціонального степеня отримати число раціональне? Відповідь на нього захоплює. Можна розглянути її на конкретному прикладі. Візьмемо ірраціональне число, наприклад, $\sqrt{2}$. Піднесемо його до степеня $\sqrt{2}$.

Якщо число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – раціональне, то відповідь на запитання знайдена - число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ раціональне, воно отримане в результаті піднесення ірраціонального числа до ірраціонального степеня.

Якщо ж число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ не є раціональним, то ми можемо піднести його до степеня $\sqrt{2}$. Тож,

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2} = 2.$$

Це число є абсолютно точно є раціональним. Отже, результатом піднесення ірраціонального числа до ірраціонального степеня може бути раціональне число.

А як щодо того, щоб разом з учнями довести ірраціональність числа $\sqrt[n]{2}$ для будь якого натурального $n > 2$? Скористаємося методом доведення від супротивного. Нехай число$\sqrt[n]{2}$ – раціональне число. Тоді його можна представити у вигляді дробу:

$$\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q}.$$

Піднесемо обидві частини рівності до n-го степеня.

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^n;$$

$$2 = \frac{p^n}{q^n};$$

$$2q^n = p^n;$$

$$q^n + q^n = p^n.$$

На цьому етапі слід ознайомити учнів з великою теоремою Ферма. Вона полягає в тому, що рівняння

$$a^n + b^n = c^n$$

для будь-якого натурального $n > 2$ розв’язків не має.

Тож, ми своєю рівністю

$$q^n + q^n = p^n$$

прийшли до протиріччя з теоремою Ферма [16]. А отже, число $\sqrt[n]{2}$ – ірраціональне число. Використання теореми Ферма для доведення цього факту – це все одно, що викликати справжній евакуатор для перевезення дитячої іграшки машинки. Але посилання на теорему Ферма сприяє формуванню наукового світогляду учнів, а також розвитку уявлення учнів про тенденції в сучасній математиці.

Для кращого засвоєння поняття «ірраціональне число» доцільно нагадати учням про числа, з якими вони зіштовхувалися ще в 6 класі – про нескінченні періодичні десяткові дроби, наприклад $\frac{1}{11}$:

$$\frac{1}{11} = 0{,}0909090909\ldots$$

Після нагадування про нескінченні дроби та про поняття «період», здобувачам освіти легше буде і зрозуміти ще одне означення ірраціонального числа.

Ірраціональним числом називають нескінченний неперіодичний десятковий дріб виду:

$$\alpha = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_n \dots.$$

Такими нескінченними неперіодичними десятковими дробами є всі корені, які не добуваються націло, наприклад, раніше згадуваний $\sqrt{2}$, а також $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{17}, \sqrt{21}$ та ще багато інших.

Проте думка, що всі ірраціональні числа породжені коренями є хибною. Багато плутаниці пов'язано з таким стереотипом у свідомості здобувачів освіти. Ірраціональним числом може бути будь-який нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Він може зовсім і не бути результатом добування кореня. Скласти такий дріб можна будь-яким чином, наприклад:

$$0{,}123234345456 \dots$$

Найвідомішими прикладами ірраціональних чисел, що не є результатом добування кореня є числа e та π. Ірраціональність цих чисел була доведена у 1766 році німецьким математиком І. Ламбертом.

Для того, щоб вчитель зрозумів, як добре засвоїли новий матеріал здобувачі освіти, доцільно запропонувати їм, наприклад, таку вправу: зобразити у зошиті запропоновану схему, вписавши числа

$$-1{,}111;\ -2;\ 172;\ \sqrt{3};\ \pi;\ 0;\ 2;\ \frac{17}{2};\ 0{,}12345\dots,\ 0{,}7$$

Рисунок 2. Відповідь до завдання

до відповідного класу. Готова схема повинна мати вигляд (Рисунок 2).

Також цікаво запропонувати учням таку вправу. Якщо розглянути множину раціональних чисел, то про неї можна сказати, що сума, різниця, добуток та частка двох раціональних чисел буде числом раціональним, тому що множина раціональних чисел є замкненою відносно вищезгаданих операцій. А що в такому випадку можна сказати про множину ірраціональних чисел?

Можна запитати учнів, чи завжди результатом додавання двох ірраціональних чисел буде число ірраціональне? Якщо ні, навести приклад двох таких ірраціональних чисел, сума яких була б числом раціональним. Такими є, наприклад, $\sqrt{3}$ та $-\sqrt{3}$. Обидва ці числа ірраціональні. Проте їх сума дорівнює 0, тобто раціональному числу. Цей приклад зовсім не означає, що сума будь-яких двох ірраціональних чисел є числом раціональним, проте він доводить, що множина ірраціональних чисел не є замкненою відносно операції додавання. Можна також сказати, що і відносно віднімання, множення та ділення множина ірраціональних чисел не є замкненою.

Зауважимо, що результатом додавання, множення (окрім множення на 0), віднімання та ділення (окрім ділення на 0) ірраціонального та раціонального чисел є ірраціональне число.

Зі старшокласниками було б цікаво розглянути задачу порівняння двох ірраціональних чисел (вони, до речі, є і трансцендентними, про це поговоримо далі): e^{π} та π^{e}. Яке з них більше? Підрахувати наближені значення e^{π} та π^{e} безпосередньо, не використовуючи калькулятор, неможливо, а з використанням калькулятора – не цікаво. Тож будемо міркувати. Для початку необхідно виконати операцію логарифмування і розглянути логарифми за основою e з цих двох чисел:

$$\ln e^{\pi} \text{ та } \ln \pi^{e}.$$

Отримаємо числа

$$\pi \text{ та } \mathrm{e}\ln\pi.$$

Для того, щоб порівняти два числа необхідно порівняти різницю цих чисел з нулем, отже матимемо або $\pi - \mathrm{e}\ln\pi > 0$, або $\pi - \mathrm{e}\ln\pi < 0$, або $\pi - \mathrm{e}\ln\pi = 0$.

Виконаємо заміну $x = \pi$. Розглянемо функцію $f(x) = \pi - \mathrm{e}\ln\pi$. Знаходимо її похідну $f'(x) = \frac{x-e}{x}$. Зважаючи на те, що $\pi > \mathrm{e}$, отримуємо, що $\frac{x-e}{x} > 0$. Тобто функція $f(x)$ є монотонно зростаючою на проміжку $[e; +\infty)$. А тому

$$\pi - \mathrm{e}\ln\pi > 0,$$

$$\pi > \mathrm{e}\ln\pi.$$

Отже,

$$e^{\pi} > \pi^{e}.$$

1.3 Ірраціональні числа в курсі геометрії середньої школи

Стосовно геометрії, не важко пояснити здобувачам освіти, що і її потреби множина раціональних чисел не задовольняє. Для доведення цього факту можна навести такий приклад: якщо взяти два співмірні відрізки, тобто деяка частина першого відрізка вкладається у інший відрізок деяку цілу кількість разів, то це відношення можна представити у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де m – довжина деякої частини першого відрізка, а n – ціла кількість разів, яку частина першого відрізка вміщається у другий відрізок. Далі доцільно запитати учнів, чи будь-які відрізки будуть співмірними? Учні мають самостійно дійти висновку, що не будь-які відрізки будуть співмірними, отже і їх відношення не можна представити у вигляді деякого дробу $\frac{m}{n}$.

Крім цього в шкільному курсі геометрі важливу роль відіграє використання ірраціонального числа π для обчислення різноманітних величин: площі круга, сектора, довжини кола, дуги; під час вимірювання радіанної міри кутів.

До того ж ірраціональні числа зустрічаються серед значень тригонометричних функцій кутів, наприклад:

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3}$ тощо.

Наведемо приклад розв'язання базової задачі рівня стандарту з теми «Об'єми геометричних тіл» курсу геометрії 11 класу. В ході розв'язання даної задачі безпосередньо використовуються ірраціональні числа.

«Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 20 см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайти об'єм циліндра» [10].

Розглянемо розв'язання даної задачі двома способами, використовуючи рисунок 3.

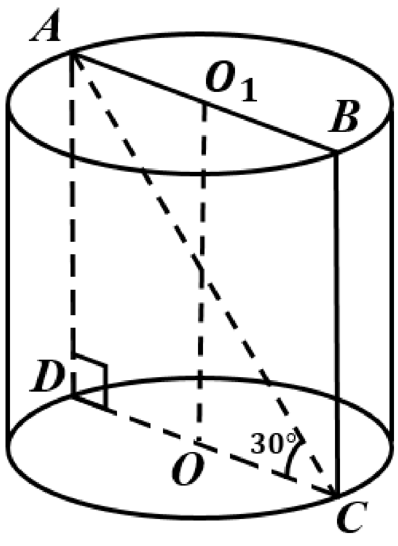

Рисунок 3

I спосіб. Осьовий переріз прямого кругового циліндру – це переріз його площиною, яка проходить через його вісь – це прямокутник. Отже, діагональ прямокутника ділить його на дві прямокутних трикутника. Розглянемо прямокутний трикутник ACD, в якому $\angle D = 90°$. Довжини катетів цього трикутника будуть дорівнювати висоті та діаметру даного циліндру. А для знаходження об'єму циліндра за формулою $V = \pi R^2 H$ необхідно знайти саме висоту і радіус циліндра. Знайдемо катети трикутника ACD за допомогою співвідношень між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику.

$$AD = AC \cdot \sin \angle C = 20 \cdot \sin 30° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ (см)};$$

$$DC = AC \cdot \cos \angle C = 20 \cdot \cos 30° = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$H = AD; \;\; d = DC;$$

$$R = \frac{DC}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$V = \pi \cdot \left(5\sqrt{3}\right)^2 \cdot 10 = 750\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Як показує практика, учні надають перевагу використанню теореми Піфагора перед використанням співвідношень між сторонами та кутами у прямокутному трикутнику через проблеми, пов’язані із їх запам’ятовуванням. Отже, можна розв’язати цю задачу по-іншому. Тим більше, що обчислення за теоремою Піфагора також можуть призвести до отримання результату у вигляді ірраціонального числа

ІІ спосіб. Оскільки катет, який лежить проти кута $30°$ дорівнює половині гіпотенузи, то:

$$AD = \frac{AC}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (см)}$$

За теоремою Піфагора:

$$DC^2 = AC^2 - AD^2$$

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2}$$

$$DC = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$R = \frac{DC}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$V = \pi \cdot \left(5\sqrt{3}\right)^2 \cdot 10 = 750\pi\ (\text{см}^3).$$

Приклад цієї задачі доводить, що оперування здобувачами освіти ірраціональними числами необхідне навіть не для того, щоб вирішувати якісь дуже складні задачі олімпіадного рівня, а для розв’язування базових задач шкільного курсу математики.

Важливість введення поняття «ірраціональних чисел» полягає ще й в тому, що раціональних чисел насправді досить мало. Можна запропонувати учням уявити числову пряму. Якщо позначити на ній раціональні числа, то хоча вони і розташовані досить щільно, між ними утворяться деякі порожні проміжки. У цих проміжках і будуть знаходися ірраціональні числа. Якщо попросити вказати навмання на будь-яку точку числової прямою, ймовірність попадання в раціональне число буде дуже малою.

РОЗДІЛ 2

АЛГЕБРАЇЧНІ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНІ ЧИСЛА

2.1 Формування понять «алгебраїчне число», «трансцендентне число»

Для повноти розгляду множини дійсних чисел доцільно ознайомитися ще з такими поняттями, як «алгебраїчні та трансцендентні числа».

Для того, щоб зрозуміти, що це за числа, слід на них поглянути з точки зору того, чи є вони коренями многочлена з дійсними коефіцієнтами, чи ні. Алгебраїчні та трансцендентні числа разом утворюють множину дійсних чисел. Називати числа алгебраїчними і трансцендентними запропонував Леонард Ейлер у 1775 році [6].Учні середньої школи мають уявлення про множину дійсний чисел, але такий погляд на неї виходить за межі шкільного курсу математики.

Розглянемо множину дійсних чисел, що є коренями многочленів. Тож, алгебраїчними називаються всі числа a, такі що існує многочлен

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r,$$

де $b_0, b_1, \dots, b_r$ – деякі цілі числа, для якого a є коренем.

Тобто, якщо замість x підставити до многочлена a, то виконуватиметься рівність

$$b_0 + b_1 a + \cdots + b_r a^r = 0.$$

Всі раціональні числа є алгебраїчними. Проте це не працює навпаки. Не обов’язково алгебраїчне число буде раціональним. Так, наприклад, вище згадуване число $\sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^2 - 2 = 0$, проте раніше ми довели, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним [17].

Також можна сказати, що всі трансцендентні числа є ірраціональними, проте не навпаки. Залежність між множинами

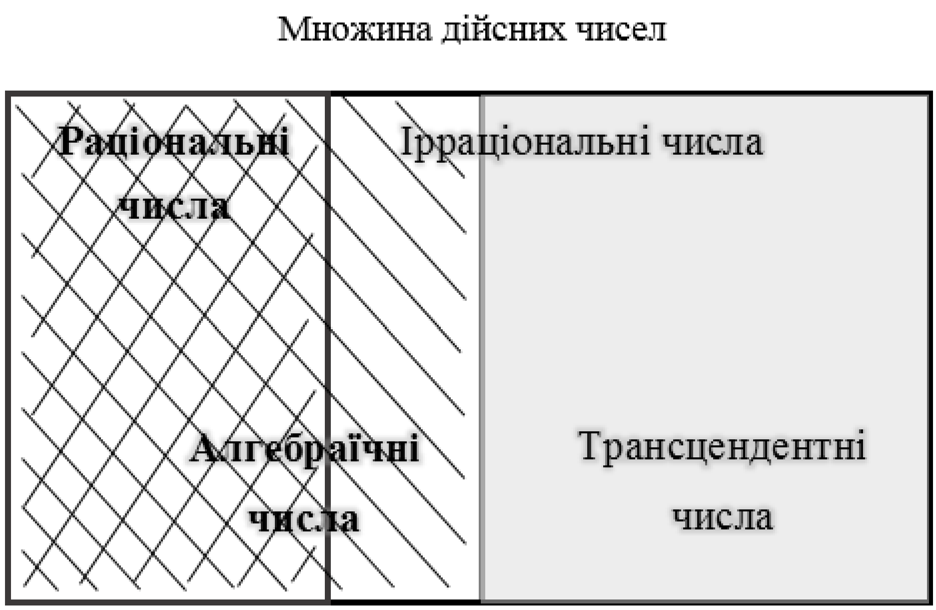

Рисунок 4 Залежність між множинами

ірраціональних, раціональних, трансцендентних та алгебраїчних чисел відображено на рисунку 4.

Множина алгебраїчних чисел є зчисленною. Також вона є підмножиною множини дійсних чисел. Зважаючи на те, що множина дійсних чисел є множиною незчисленною, тоді можна зробити висновок про те, що множина алгебраїчних чисел не вичерпує множину дійсних чисел. Це означає, що в множині дійсних чисел є такі числа, що не є алгебраїчними [14].

Існування таких чисел у 1844 році довів французький математик Жозеф Ліувіль. Числа, що не є алгебраїчними називають трансцендентними.

Оскільки множина дійсних чисел є незчисленною, а множина алгебраїчних чисел – зчисленною, то можна сказати, що майже всі дійсні числа є трансцендентними.

Одним з найвідоміших прикладів трансцендентних чисел є число e. Трансцендентність цього числа була доведена французьким математиком Шарлем Ермітом у 1873 році. Це доведення є дуже складним і громіздким. Проте воно поклало початок роботам в цій області іншого німецького математика К. Ліндемана. Саме розвиваючи метод доведення трансцендентності чисел Ерміта, він відкрив цілий клас трансцендентних чисел. Детальніше ознайомитися з цими дослідженнями можна, розглянувши роботи цих вчених та тих, хто займався вивченням цих питань [7, 11, 18, 19].

Із загальної теореми, виведеної Ліндеманом випливало, що і інше, дуже відоме число – число π – трансцендентне. Пізніше, у 1894 році це доведення було спрощено німецьким математиком Феліксом Клейном.

Доведення трансцендентності числа стало важливим кроком для доведення неможливості вирішення однієї з трьох знаменитих задач древності про квадратуру круга. Вона полягає в тому, що за допомогою циркуля та лінійки без поділок необхідно побудувати такий квадрат, площа якого дорівнювала б площі круга.

Якщо розглянути круг, радіус якого дорівнює 1, то площа цього круга становитиме π. Зважаючи на це, побудова шуканого квадрата представляє собою побудову квадрата, сторона якого дорівнюватиме $\sqrt{\pi}$.

З того, що числа π є трансцендентним випливає і те, що число $\sqrt{\pi}$ – трансцендентне. Тому побудова відрізка довжини $\sqrt{\pi}$ є неможливою.

Цікавою з точки зору трансцендентності чисел є теорема про трансцендентність числа

$$\alpha = 0{,}123456789101112 \ldots .9899100101 \ldots .$$

Це число являє собою десятковий дріб, в якому числа після коми йдуть поспіль натуральні числа, починаючи з 1.

Теорема ця була доведена К. Малером за допомогою теореми про наближення алгебраїчних ірраціональностей раціональними дробами, що є уточненням теореми Т. Шнейдера [1].

Важливим для теорії трансцендентних та алгебраїчних чисел було відкриття радянським математиком О. Гельфондом нового методу встановлення трансцендентності чисел. За допомогою цього методу була доведена трансцендентність чисел $e^{\pi}, \log_2 3\,, 2^{\sqrt{2}}$ та багатьох інших [4].

Терема, запропонована Гельфондом полягає в наступному: Якщо α – алгебраїчне число, відмінне від 0 та 1, а β – алгебраїчне ірраціональне число, то α^{β} – трансцендентне число.

З цієї теореми було виведено також, що число $\lg 2$ – трансцендентне. Можемо позначити $\lg 2$ як β, і число 10 як α, тоді

$$\alpha^{\beta} = 10^{\lg 2} = 2.$$

Оскільки число β за теоремою Гельфонда має бути числом алгебраїчним для того, щоб число α^{β} було трансцендентним, а з означення десяткового логарифму ми отримали, що $\alpha^{\beta} = 2$, тобто α^{β} – алгебраїчне, то число β алгебраїчним не є. Тобто $\lg 2$ – трансцендентне [5].

Тож, числа виду $\lg r$ (r – будь-яке число, крім 1, 10, 100, 1000….) є трансцендентними.

Ця теорема є розв’язанням однієї з найскладніших проблем математики, висунутих Гільбертом у своїй доповіді [2].

Трансцендентність числа e^{π} є частинним випадком теореми Гельфонда.

Як простий наслідок з цієї ж теореми отримується, що логарифми раціональних чисел при раціональних основах системи логарифмів або раціональні, або трансцендентні, тобто не можуть бути алгебраїчними ірраціональними. Проблема визначення природи таких чисел була поставлена ще Ейлером [3].

2.2 Сьома проблема Гільберта про ірраціональність та трансцендентність деяких чисел.

На Міжнародному математичному конгресі в Парижі в 1900 р. видатний німецький математик Давид Гільберт виступив з доповіддю під назвою «Математичні проблеми». Ця доповідь була потім декілька разів опублікована в оригіналі та в перекладах; останнє видання оригіналу знаходимо в третьому томі зібрання творів Гільберта [1].

Особливо цінна доповідь Давида Гільберта тим, що жоден математик з тих пір так і не наважився виступити з таким узагальненням проблем науки загалом.

У своїй доповіді Давид Гільберт звернув увагу на важливість постановки і дослідження проблем для розвитку та удосконалення будь-якої науки, наголосив, що за відсутності проблем в науці, вона починає поступово вимирати; висловив думку про те, що поставлені перед дослідниками задачі мають бути досить складними, але посильними для їх розв'язання, щоб заохотити до дослідження; нагадав про відомі у математичному світі проблеми Бернуллі, Ферма, Якобі, Галуа та багато інших; спонукав науковців до строгості та упорядкованості математичних доведень розглянутих проблем.

За своїм характером проблеми Гільберта дуже різнорідні. Іноді – це конкретно поставлене питання, на яке шукається однозначна відповідь – так чи ні. Іноді задача ставиться менш визначено [1].

Однією з проблем, розглянутих у доповіді є проблема ірраціональності та трансцендентності деяких чисел. У ній виділено деякий клас задач, розв'язання яких може призвести до нових методів вивчення ірраціональних та трансцендентних чисел.

Гільберт у своїй доповіді казав, що «коли ми дізнаємося, що деякі спеціальні трансцендентні функції, що відіграють важливу в аналізі суттєву роль, приймають за певних алгебраїчних значень аргументу алгебраїчні ж значення, то ця обставина здається нам особливо дивовижної і гідною дослідження. Ми завжди чекаємо, що трансцендентні функції при алгебраїчних значеннях аргументів приймають, взагалі кажучи, трансцендентні значення, і хоча нам добре відомо, що існують навіть такі цілі трансцендентні функції, які для всіх алгебраїчних значень аргументу приймають раціональні значення, ми все ж таки вважаємо дуже вірогідним, що така функція, як, наприклад, показникова $e^{i\pi z}$, яка очевидно для всіх раціональних значень аргументу z приймає алгебраїчні значення, з іншої сторони, буде завжди приймати для всіх алгебраїчних ірраціональних значень z трансцендентні значення. Цьому висловлюванню можна надати і геометричний вигляд наступним чином. Якщо в рівнобедреному трикутнику відношення кута при основі до кута при вершині є алгебраїчним, але не є раціональним числом, то відношення основи до бічної сторони є трансцендентне число» [1].

Доведення цього факту є дуже складним, хоча формулюється воно досить просто.

Так само, як і доведення того, що степінь α^{β} при алгебраїчній основі α і алгебраїчному ірраціональному показнику β – як, наприклад, число $2^{\sqrt{2}}$ або $e^{\pi} = i^{-2i}$ є завжди або трансцендентне число, або принаймні ірраціональне [1].

Трансцендентність числа $a^{\sqrt{b}}$, якщо a – алгебраїчне, а b – натуральне, була доведена у 1930 році математиком О. Кузьміним.

Число $2^{\sqrt{2}}$ є частинним випадком чисел, виду $a^{\sqrt{b}}$ при раніше згаданих умовав.

Існування трансцендентних чисел строго було доведено Ж. Ліувілем у 1844 році, але ще Л. Ейлер їх існування вважав безумовним, хоча цілком строгого визначення трансцендентного числа у нього, мабуть, не було [1].

Проблема Гільберта щодо ірраціональноті та трансцендентності деяких чисел вважається вирішеною.

Два основних методи доведення трансцендентності, як і було припущено Д. Гільбертом, засновані на дослідженні арифметичних і аналітичних властивостей функцій, значенням яких є при алгебраїчному значенні аргументу досліджуване число [1].

Геометрична проблема трансцендентності відношення основи до бічної сторони рівнобедреного трикутника, відношення кутів якого буде ірраціональним алгебраїчним числом, зводиться до трансцендентності числа

$$e^{\pi\alpha} = i^{-2i\alpha}$$

при алгебраїчному і дійсному α [1].

Трансцендентність чисел виду α^{β} при алгебраїчному $\alpha, \alpha \neq 0, 1,$ і β алгебраїчним ірраціональним (до питання про арифметичну природу таких чисел і зводиться проблема Д. Гільберта) була вперше доведена в 1934 р. Т. Шнейдером [1].

Загальна проблема відсутності алгебраїчних відношень з цілими коефіцієнтами між числами виду α^{β} при попередніх припущеннях α і β не розв’язана до нашого часу [1].

Деякі частинні випадки цієї проблеми за допомогою суттєвого зусилля попередніх методів були розв’язані в 1949 р. А. О. Гельфондом. Загалом, було доведено, що таких відношень немає між числами α^{α} і α^{α^2}, де $\alpha \neq 0, 1$ – алгебраїчне число, а α – кубічне ірраціональність [1].

ВИСНОВКИ

Аналіз навчальної літератури та шкільних програм з математики показав, що якість стану викладання навчального матеріалу, що стосується ірраціональних чисел в середній школі є не достатньо високою. Вивченню теми «Ірраціональні числа» в шкільному курсі математики слід приділити більшу увагу через те, що з ірраціональними числами здобувачі освіти мають справу впродовж усього навчання. Ця тема є підґрунтям для подальшого вивчення предмету. Тому в роботі було наведено приклади завдань, якими можна зацікавити учнів та спонукати їх до вивчення ірраціональних чисел, а також вправ, які сприяли б кращому засвоєнню навчального матеріалу здобувачами освіти. В роботі також представлені проблеми, з якими можуть зіштовхнутися школярі в процесі вивчення теми «Ірраціональні числа» та запропоновано шляхи їх вирішення. Також наголошувалося на тому, що погляд на множину дійсних чисел, як на множину раціональних та ірраціональних чисел не єдиний. Множину дійсних чисел також можна розділити на множину чисел, що є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами і множину чисел, що не є коренями многочлена з дійсними коефіцієнтами, тобто множини алгебраїчних та трансцендентних чисел.

Аналіз робіт вчених, що займалися вивченням ірраціональних та трансцендентних чисел показав, що, незважаючи на велику кількість досліджень та відкриттів в теорії трансцендентних чисел, ця область математики має велику кількість «білих плям». В роботі розглянуто одну з проблем, представлену у доповіді видатного німецького математика Д. Гільберта на засіданні математичного конгресу в Парижі. Аналіз цієї роботи показав, що, хоча і проблеми, озвучені Гільбертом на математичному конгресі були сформульовані не досить конкретно, проблема ірраціональності та трансцендентності деяких чисел знайшла своє вирішення у роботах математика О. Гельфондом. Незважаючи на це, дослідження трансцендентних чисел на цьому не завершується і продовжує цікавити математиків з усіх куточків світу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александров П.С. Проблемы Гильберта. М. : Наука, 1969. 240 с.
2. Болибрух А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя). Москва, 1999. №2. С. 1 – 24. URL:https://math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.2.pdf
3. Бухштаб А.А. Теория чисел. М. : Просвещение, 1966. 384 с.
4. Гельфонд А.О. Приближение алгебраических чисел алгебраическими же числами и теория трансцендентных чисел. УМН., 1949. №4. С.19 – 49.
5. Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа. М. : ГИТТЛ, 1952. 224 с.
6. Жуков А. Алгебраические и трансцендентные числа. URL:http://kvant.mccme.ru/pdf/1998/04/kv0498kaleid.pdf
7. Кайбханов А., Скопенков А.Б. Примеры трансцендентных чисел. Матем. просв., 2006. №10. С. 176 – 184.
8. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. 256 с.
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х. : Гімназія, 2016. 240 с.
10. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2019. 208 с.
11. Мордухай-Болтовской Д.Д. Некоторые свойства трансцендентных чисел первого класса. Матем. сб., 1927. №1. С. 55 – 100.
12. Навчальна програма з математики для 10-11 класів. Профільний рівень URL:https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-10-11-klas/2018-2019/matematika-profilnij-rivenfinal.docx

13. Навчальна програма з математики для 5-9 красів. Рівень стандарту URL:https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/5-programa-z-matematiki.docx
14. Нестеренко Ю.В. Теория чисел: учеб. для студ. высших учебных заведений. М. : Академия, 2008. 272 с.
15. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные. М. : Мир, 1966. 198 с.
16. Постников М.М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. М. : Наука, 1978, 128 с.
17. Трансцендентні числа: що це, формули, приклади, вправи. URL:https://uk.warbletoncouncil.org/numeros-trascendentes-4506
18. Фельдман Н. Алгебраические и трансцендентные числа. URL:http://kvant.mccme.ru/1983/07/algebraicheskie_i_transcendent.htm
19. Фельдман Н.И., Шидловский А.Б. Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел. УМН., 1967. №3. С. 3 – 81 .
20. Фихтенгольц Г.М. Иррациональные числа в средней. Математическое просвещение., 1957. №2. С. 133 – 148. URL:http://www.mathnet.ru/links/f1cecfd0bd77b7d1b336ac11a9864b35/mp463.pdf