http://dx.doi.org/10.15673/2072-9812.1/2015.50167
Proc. Intern. Geom. Center 2015 **8**(1) 84–92 *dω*

Функтори скінченного степеня у асимптотичних категоріях

М. М. Зарічний М. М. Романський О. Г. Савченко

Анотація Розглянуто функтори у асимптотичній категорії, породжені деякими функторами скінченного степеня у категорії компактів. Встановлено деякі геометричні властивості цих функторів.

Ключові слова Асимптотична категорія, функтор, симетричний степінь, проективний степінь

УДК 515.12

1 Вступ

Теорія коваріантних функторів скінченного степеня у топологічних категоріях, зокрема, категорії компактних гаусдорфових просторів та категорії метризовних просторів, знаходить різноманітні застосування в геометричній топології (див., наприклад, [8], [4]). Серед різноманітних результатів у цьому напрямку відзначимо збереження функторіальними конструкціями скінченновимірних многовидів ([4]).

У цій статті ми розглядаємо деякі аналоги доведених у цитованих книгах результатів для асимптотичної категорії $\mathcal{A}$, яку запровадив Дранішников [5] (означення див. нижче). Наш підхід до означення функторів тут аналогічний до запропонованого А. Дранішниковим у [5] — він дещо відрізняється від того, який розглядала О. Шукель в [9].

2 Попередні відомості

Нагадаємо, що об'єктами асимптотичної категорії $\mathcal{A}$ є власні метричні простори, а морфізмами — власні асимптотично ліпшицеві відображення.

Метричний простір (X, d) називаємо власним, якщо кожна замкнена куля в X компактна.

Відображення $f\colon X \to Y$ називають власним, якщо прообраз кожної компактної множини є компактним.

Відображення $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ називається асимптотично ліпшицевим, якщо існують два таких числа, λ *і* s $(\lambda > 0,\ s \geq 0)$, що $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + s$, $x, y \in X$.

Нехай d — метрика на множині X і $\sim$ — відношення еквівалентності на X. Фактор-метрика ϱ на множині $X/\sim$ задається так: якщо $[x], [y] \in X/\sim$, то $\varrho([x], [y])$ — це інфімум сум вигляду $\sum_{i=1}^{n} d(a_i, b_i)$, де $x \sim a_1$, $b_n \sim y$, $a_{i+1} \sim b_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Взагалі кажучи, функція ϱ є лише псевдометрикою, однак у тих випадках, що ми розглядаємо, вона є метрикою.

Конус $\mathrm{Cone}(X)$ над компактним метричним простором (X, d) — це факторпростір добутку $(X \times \mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається умовою $(x, 0) \sim (y, 0)$, $x, y \in X$. У літературі зустрічаються різні метризації конусів. Зокрема, якщо $X \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то конус $\mathrm{Cone}(X)$ природно ототожнюється з підпростором $\{tx \mid x \in X,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ і метрика на ньому індукується з $\mathbb{R}^{n+1}$. Якщо ж (X, d) — метричний простір і $\mathrm{diam}(X) \leq 2$, то метрика $\tilde{d}$ на $\mathrm{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\tilde{d}((x, t), (y, s)) = \min\{t, s\} d(x, y) + |t - s|.$$

Конструкція конуса функторіальна. Якщо задано відображення $f\colon X \to Y$ метричних компактів, то відображення $\mathrm{Cone}(f)\colon \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Cone}(Y)$ означується формулою $\mathrm{Cone}(f)(x, t) = (f(x), t)$. Проте відомо, що незалежно від вибору метрики, функтор конуса зберігає властивість ліпшицевості відображень.

Лема 1 *Нехай $f\colon X \to Y$ — ліпшицеве відображення метричних компактів. Тоді відображення* $\mathrm{Cone}(f)\colon \mathrm{Cone}(X) \to \mathrm{Cone}(Y)$ *(асимптотично) ліпшицеве.*

Ізоморфізмами в категорії $\mathcal{A}$ є гомеоморфізми $f\colon X \to Y$ такі, що f і f^{-1} — асимптотично ліпшицеві.

У статті [5] А. Дранішников означив асимптотичний добуток

$$X \tilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) | d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. В дусі цього означення ми розглядатимемо деякі функтори у категорії $\mathcal{A}$.

Надалі в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ відміченою вважається точка 0.

3 Функтори в асимптотичних категоріях

Нижче ми розглядаємо деякі функтори у категорії $\mathcal{A}$, породжені функторами скінченного степеня у категорії компактів.

3.1 Симетричні степені

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені X^n метричного простору X, що задається умовою: $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, \dots, n\}$ така що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X в категорії $\mathcal{A}$ і позначають $SP^n(X)$.

Клас еквівалентності відношення $\sim$, що містить точку $(x_1, \dots, x_n)$, позначають $[x_1, \dots, x_n]$. Якщо $x_0 \in X$ — відмічена точка, то приймемо

$$\widetilde{SP}^n(X) = \{[x_1, \dots, x_n] \in SP^n(X) \mid d(x_i, x_0) = d(x_j, x_0),\ i, j = 1, \dots, n\}.$$

Метрику $\hat{d}$ на $\widetilde{SP}^n(X)$ задають формулою

$$\hat{d}([x_1, \dots, x_n], [y_1, \dots, y_n]) = \min_{\sigma} \max_{i} d(x_i, y_{\sigma(i)}).$$

Нехай M — лист Мебіуса в $\mathbb{R}^3$, заданий стандартними параметричними рівняннями: $x(u, v) = (1 + (v/2)\cos(u/2))\cos u$, $y(u, v) = (1 + (v/2)\cos(u/2))\sin u$, $z(u, v) = (v/2)\sin(u/2)$, де $0 \le u < 2\pi$ і $-1 \le v \le 1$.

Пропозиція 1 *В асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, другий симетричний степінь $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний конусу $\mathrm{Cone}(M)$.*

Доведення 1 *Зобразимо коло S^1 як факторпростір відрізка $[0, 1]/\sim$, де $0 \sim 1$. Кожній невпорядкованій парі $[x, y] \in SP^2([0, 1])$ ставимо у відповідність пару*

$$(\min\{x, y\}, \max\{x, y\}) \in \Delta^2 = \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid s \ge t\}.$$

Це породжує природне відображення $SP^2(S^1) = SP^2([0, 1]/\sim)$ в $\Delta^2/\sim$, де $\sim$ — відношення еквівалентності на Δ^2, задане умовами: $(x, 0) \sim (1, x)$. Нескладно переконатися, що це відображення ліпшицеве.

Наступним кроком є відобразити біліпшицево простір $\Delta^2/\sim$ на M. Нескладно зробити це так, що образом середньої лінії $y = x - \frac{1}{2}$ в $\Delta^2/\sim$ є середня лінія $v = 0$ на листі Мебіуса. Відповідно, паралельні до середньої лінії переходять у паралельні до середньої лінії на M. Вказане відображення нескладно зробити біліпшицевим.

Нарешті, скориставшись лемою 1, будуємо шукане відображення $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Cone}(SP^2(S^1)) \to \mathrm{Cone}(M)$.

Пропозиція 2 *Симетричний квадрат $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ ізоморфний $\mathbb{R}^3_+$.*

Доведення 2 *Доведемо, що $\widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+)$ ізоморфний просторові $X = \{(x, y, z)|x \geq 0, y \geq 0, z < x\}$, який, у свою чергу, ізоморфний просторові $\mathbb{R}^3_+$ (див., наприклад [5]).*

Означимо відображення $f\colon \widetilde{SP}^2(\mathbb{R}^2_+) \to X$ формулою

$$f\left([(a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2)]\right) = (a\cos\frac{\alpha_1}{2}, a\sin\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a),\ \ \alpha_1 \geq \alpha_2.$$

Доведемо, що відображення f^{-1} ліпшицеве. Не втрачаючи загальності, припускаємо, що $b > a$. Тоді

$$\hat{d}([(a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2)], [(b\cos\beta_1, b\sin\beta_1), (b\cos\beta_2, b\sin\beta_2)]) =$$

$$= \max\{d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)), d((a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2), (b\cos\beta_2, b\sin\beta_2))\} \leq$$

$$\leq d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)) + |\alpha_2 a - \beta_2 b| <$$

$$< 4\rho\left((a\cos\frac{\alpha_1}{2}, a\sin\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), (b\cos\frac{\beta_1}{2}, b\sin\frac{\beta_1}{2}, \beta_2 b)\right).$$

Доведемо тепер, що відображення f ліпшицеве. Справді,

$$\rho\left((a\cos\frac{\alpha_1}{2}, a\sin\frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2 a), (b\cos\frac{\beta_1}{2}, b\sin\frac{\beta_1}{2}, \beta_2 b)\right) \leq$$

$$\leq 2d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)) + |\alpha_2 a - \beta_2 b| \leq$$

$$\leq 3\max\{d((a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (b\cos\beta_1, b\sin\beta_1)), d((a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2), (b\cos\beta_2, b\sin\beta_2))\} =$$

$$= 3\hat{d}([(a\cos\alpha_1, a\sin\alpha_1), (a\cos\alpha_2, a\sin\alpha_2)], [(b\cos\beta_1, b\sin\beta_1), (b\cos\beta_2, b\sin\beta_2)]).$$

3.2 Гіперсиметричні степені і теорема Ботта

Нехай (X, d) — метричний простір з відміченою точкою x_0. Позначимо через $\exp_n(X)$ множину всіх непорожніх підмножин у X потужності $\leq n$ (гіперсиметричний степінь простору X). Приймемо

$$\widetilde{\exp}_n(X) = \{A \in \exp_n(X) \mid \|x\| = \|y\| \text{ для всіх } x, y \in A\}.$$

Теорема 1 *Простір $\widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2)$ ізоморфний $\mathbb{R}^4$ в категорії $\mathcal{A}$.*

Цей результат є аналогом теореми Р. Ботта [3], яка стверджує, що $\exp_3 S^1$ гомеоморфне S^3. На аналізі доведення Ботта базується доведення теореми 1. Нехай $S^1 = [0,1]/\sim$, де $0 \sim 1$. Нехай $\Delta^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ і $\sim$ — відношення еквівалентності на Δ^3, задане умовами: $(0, x, y) \sim (x, y, 1)$, $(x, x, y) \sim (x, y, y)$.

Громіздкими, але безпосередніми обчисленнями можна показати, що гомеоморфізм $\exp_3(S^1) = \exp_3([0,1]/\sim)$ і $\Delta^3/\sim$ (остання множина наділяється фактор-метрикою, породженою евклідовою метрикою) є біліпшицевим. У доведенні Ботта гомеоморфізм між $\Delta^3/\sim$ і S^3 здійснюється за допомогою зображення сфери як об'єднання двох заповнених торів. Знову ж таки, аналіз звужень гомеоморфізмів на цих заповнених торах та їх склеювання показує біліпшицевість результуючого гомеоморфізму $f\colon \exp_3 S^1 \to S^3$. Тоді відображення

$$\mathrm{Cone}(f)\colon \mathrm{Cone}(\exp_3 S^1) = \widetilde{\exp}_3(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Cone}(S^3) \simeq \mathbb{R}^4$$

є ізоморфізмом у категорії $\mathcal{A}$.

3.3 Ймовірнісні міри

Для кожного натурального n через $P_n(X)$ позначаємо множину всіх ймовірнісних мір на множині X, носії яких мають не більше ніж n елементів. Кожен елемент з $P_n(X)$ має вигляд $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, де $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, і $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Якщо d — метрика на множині X, то на множині $P_n(X)$ можна задати метрику Канторовича-Рубінштейна. Нехай $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, $\nu = \sum_{i=1}^n \beta_i \delta_{y_i}$, тоді

$$d_{KR}(\mu, \nu) = \inf \left\{ \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} d(x_i, y_j) \mid \gamma_{ij} \geq 0,\ \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = \beta_j,\ \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} = \alpha_i \right\}.$$

Пропозиція 3 *Відображення* $g\colon SP^n(X) \to P_n(X)$, *задане формулою* $g([x_1,\dots,x_n]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, *— біліпшицеве вкладення.*

Доведення 3 *Нехай* $x = [x_1,\dots,x_n], y = [y_1,\dots,y_n] \in SP^n(X)$ *і* $\hat{d}(x,y) \le c$, *для деякого* $c > 0$. *Тоді існує перестановка* σ *така, що* $d(x_i, y_{\sigma(i)}) \le c$ *для кожного* $i = 1,\dots,n$. *Нехай* $\mu = g(x)$, $\nu = g(y)$. *Приймемо у формулі для відстані Канторовича-Рубінштейна* $\gamma_{i\sigma(i)} = \frac{1}{n}$ *і* $\gamma_{ij} = 0$ *для решти* i, j. *Тоді маємо* $d_{KR}(\mu,\nu) \le \hat{d}(x,y)$.

Крім того, очевидно, що $\hat{d}(x,y) \le n d_{KR}(\mu,\nu)$.

Якщо $x_0 \in X$ — відмічена точка, то приймемо

$$\tilde{P}_n(X) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid d(x_i,x_0) = d(x_j,x_0),\ i,j = 1,\dots,n \right\}.$$

Теорема 2 *Простір* $\tilde{P}_2(\mathbb{R}^2)$ *ізоморфний* $\mathbb{R}^4$ *у категорії* $\mathcal{A}$.

Доведення цього факту базується на гомеоморфізмі просторів $P_2(S^1)$ та S^3.

3.4 Проективні степені

У статті [5] А. Дранішников означив надбудову $\sum X$ простору X за допомогою формули $\sum X = X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_\pm(X)$, де вкладення $i_\pm\colon X \to X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+$ визначаються формулою $i_\pm(x) = J^{-1}(x, \pm\|x\|)$; тут відображення $J\colon X\widetilde{\times}\mathbb{R}^2_+ \to X\times\mathbb{R}$ задається формулою $J(x,(s,t)) = (x,s)$, $x \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}$.

Поняття проективного степеня означив А. Шанковський [11]. Точка $y \in Y$ називається істотною координатою точки $(y_1,\dots,y_n)$, якщо множина $\{j \mid y_j = y\}$ складається з непарного числа елементів. Означуємо n-й проективний степінь простору X як факторпростір $X^n/\sim$, де відношення неквівалентності $\sim$ означене умовою: $(x_1,\dots,x_n) \sim (y_1,\dots,y_n)$, якщо $(x_1,\dots,x_n)$ і $(y_1,\dots,y_n)$ мають однакову множину істотних координат. Позначення: $\mathrm{Pr}^n(X)$.

Нескінченний проективний простір розглядали Дольд і Том [12].

Зауважимо, що цей проективний простір може бути описаний також як факторпростір симетричного добутку $SP^n(X)$. Розглянемо кожну точку симетричного добутку як формальну суму $\sum n_i x_i$, де n_i — невід'ємні цілі числа, $\sum n_i = n$, і точки x_i попарно різні.

Означимо простір $\tilde{P}^n(X)$ як факторпростір симетричного степеня $\widetilde{SP}^n(X)$ за відношенням еквівалентності: $\sum n_i x_i \sim \sum m_i x_i$ тоді і лише тоді, коли $n_i \equiv m_i \mod 2$ для кожного i.

Пропозиція 4 *Проективний квадрат* $\mathrm{Pr}^2(\mathbb{R})$ *ізоморфний надбудові* $\sum \mathbb{R}_+$.

Доведення 4 *Для простоти* $\sum \mathbb{R}_+$ *ототожнимо з множиною* $Y = J\left(\sum \mathbb{R}_+\right)$. *Означимо відображення* $\varphi\colon Y \to Pr^2(\mathbb{R})$ *формулою*

$$\varphi\left((r\cos\alpha, r\sin\alpha)\right) = \left[r\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right), r\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Тоді для оберненого відображення одержуємо

$$\varphi^{-1}\left([r\cos\alpha, r\sin\alpha]\right) = \left(r\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8}\right), r\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right).$$

Неважко побачити, що відображення φ *ліпшицеве з* $\lambda = 2$, *а* φ^{-1} *ліпшицеве з* $\lambda = 1$.

З деяких результатів асимптотичної топології випливає, що аналогом сфери S^n у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ є евклідовий простір $\mathbb{R}^{n+1}$. Аналогом проективного простору $\mathbb{R}P^n$ є факторпростір $\mathbb{R}^{n+1}/\pm$.

Теорема 3 *У категорії* $\mathcal{A}$ *простори* $\tilde{P}^n(\mathbb{R}^2/\pm)$ *та* $\mathbb{R}^{n+1}/\pm$ *ізоморфні.*

Доведення цього результату базується на результаті Шанковського [11] про гомеоморфізм просторів $\mathrm{Pr}^n(S^1) = \mathrm{Pr}^n(\mathbb{R}P^1)$ та $\mathbb{R}P^n$.

3.5 Суперрозширення $\lambda_3(X)$

Поняття суперрозширення $\lambda(X)$ топологічного простору X запровадив Й. де Гроот (див. необхідну інформацію в [8]). Нижче нам знадобиться альтернативний опис підмножини $\lambda_3(X) \subset \lambda(X)$, що складається з максимальних зчеплених систем в X, носії яких мають потужність ≤ 3.

Нехай $x, y, z \in X$. Позначимо через $[x, y, z]$ сім'ю замкнених підмножин $A \subset X$, що мають властивість: A містить принаймні одну з трьох множин $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$. Носієм елемента $[x, y, z]$ називаємо множину:

1) $\{x, y, z\}$, якщо всі три точки x, y, z попарно різні;

2) $\{t\}$, якщо t зустрічається щонайменше двічі у послідовності x, y, z.

Позначення: $\mathrm{supp}([x, y, z])$.

Нехай d — метрика на множині X. Тоді на множині $\lambda_3(X) = \{[x, y, z] \mid x, y, z \in X\}$ можна означити метрику d_V:

$$d_V([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2]) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \varepsilon - \text{окіл кожного елемента з } [x_1, y_1, z_1] \text{ містить елемент з } [x_2, y_2, z_2]\}$$

(див [8]).

В [1] доведено, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3.

Аналогічно до розглянутого вище, для кожного власного метричного простору (X, d) з відміченою точкою $x_0 \in X$ означимо $\tilde{\lambda}_3(X)$ як підмножину в $\lambda_3(X)$, утворену елементами $[x, y, z]$, такими, що функція $\|\cdot\|$ стала на множині $\mathrm{supp}([x, y, z])$.

Наводимо без доведення такий результат.

Теорема 4 *Простір* $\tilde{\lambda}_3(\mathbb{R}^2)$ *ізоморфний* $\mathbb{R}^4$ *в категорії* $\mathcal{A}$.

Література

1. М.М. Заричный, *Фундаментальная група суперрасширения* $\lambda_n(X)$. - В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ,1984 - С. 24-31.
2. В.В. Федорчук, В.В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции.* - – М. – 2006.
3. R. Bott, *On The Third Symmetric Potency of* S_1. - Fund. Math. 39 (1952), 264–268.
4. C. H. Wagner, *Symmetric, cyclic, and permutation products of manifolds.* - Rozprawy Matematyczne tom/nr w serii: 182. wydano: 1980
5. A. Dranishnikov, *Asymptotic topology.* - Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.
6. A. Dranishnikov, M. Zarichnyi, *Universal spaces for asymptotic dimension.* - Topol. Appl., Vol. 140, №2-3 (2004), P. 203-225.
7. I. Protasov, M. Zarichnyi, *General asymptology.* - (Math. Studies: Monograph Series. - Vol. XII) Lviv: VNTL Publ, (2007), 219 P.
8. A. Teleiko, M. Zarichnyi, *Categorical topology of compact Hausdorff spaces.* - Mathematical Studies Monograph Series, 5. VNTL Publishers, Lviv, 1999. 256 pp.
9. O. Shukel', *Functors of finite degree and asymptotic dimension zero.* - Mat. Stud. 29(2008), №1, 101–107.
10. J. Mostovoy, *Lattices in* $\mathbb{C}$ *and finite subsets of a circle.* - Amer. Math. Monthly 111(4): 357-360 (2004)
11. A. Szankowski, *Projective potencies and multiplicative extension operators.* - Fundamenta Mathematicae (1970) Volume: 67, Issue: 1, page 97–113.
12. A. Dold, R. Thom, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte.* - Annals of Mathematics. Second Series 67(1958), 239—281

М. М. Зарічний

Львівський національний університет імені Івана Франка,

Львів, вул. Університетська, 1

E-mail: mzar@litech.lviv.ua

М. М. Романський

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,

вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, Львівська обл.

E-mail: romanskiy.miha@ukr.net

О. Г. Савченко
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
вул. Стрийська, 3, м. Дрогобич, Львівська обл.
E-mail: romanskiy.miha@ukr.net

Mykhailo Zarichnyi, Mykhailo Romanskyi, Aleksandr Savchenko

Functors of finite degree in the asymptotic category

We consider functors in the asymptotic category generated by some functors of finite degree in the category of compacta. Some geometric properties of these functors are established