А. Г. Савченко, О бикомпактах вида $F(X)$, являющихся непрерывными образами I^τ и D^τ, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, номер 3, 3–5

МАТЕМАТИКА

УДК 515.12

А. Г. Савченко

О БИКОМПАКТАХ ВИДА F(X), ЯВЛЯЮЩИХСЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОБРАЗАМИ I^τ и D^τ

Для бесконечного кардинала τ через I^τ и D^τ обозначим тихоновский кирпич веса τ и обобщенный канторов дисконтинуум веса τ соответственно. Всюду ниже символом F будем обозначать ковариантный функтор, действующий из категории бикомпактов и непрерывных отображений в эту же категорию. Все необходимые понятия, связанные со свойствами функторов, содержатся в [1]. Подробное описание свойств отображения $\pi_{F,X,n}: X^n \times F(n) \to F(X)$, определенного формулой $\pi_{F,X,n}(\xi, a) = F(\xi)a$, где X — бикомпакт и n — целое неотрицательное число, можно найти в [2].

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть F — мономорфный, сохраняющий пересечения и пустое множество функтор конечной степени n. Тогда*

а) *если бикомпакт $F(X)$ является непрерывным образом D^τ, то и бикомпакт X — непрерывный образ D^τ;*

б) *если X — связный бикомпакт и $F(X)$ — непрерывный образ I^τ, то X также непрерывный образ I^τ.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма. *Если связный бикомпакт X является непрерывным образом свободной суммы s экземпляров тихоновских кубов I^τ, то X — непрерывный образ I^τ.*

Доказательство леммы предоставляется читателю.

Доказательство теоремы. Покажем, что для любой точки $x \in X$ существует такой, являющийся непрерывным образом D^τ, бикомпакт $P_x \subseteq X$, что $x \in \operatorname{Int} P_x$.

Поскольку $F_0(X)$ гомеоморфно $F(\varnothing)$ и функтор F сохраняет пустое множество, то найдется такое натуральное число $k \leqslant n$, что $F_k(X) = F(X)$ и $F_{k-1}(X)$ не совпадает с $F_k(X)$. Следовательно, $F_{k-1}(k)$ — собственное подмножество $F(k)$. Зафиксируем точку $a \in F(k) \setminus F_{k-1}(k)$. Пусть $x = x_1$ — произвольная точка бикомпакта X. Если $k \geqslant 2$, то выберем отличные от x_1 и попарно различные точки $x_2, \ldots, x_k$ бикомпакта X. В силу свойств отображения $\pi_{F,X,k}: X^k \times F(k) \to F(X)$ существует такая окрестность $W \subseteq X_*{}^k \times (F(k) \setminus F_{k-1}(k))$ точки $(x_1, \ldots, x_k, a)$, что $\pi_{F,X,k}|_W$ — гомеоморфизм. Выберем такие окрестности $U_i \subseteq X$ точек x_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и такую окрестность V точки a, что $\prod_{i=1}^{k} \overline{U}_i \times \overline{V} \subseteq W$ (здесь и далее чертой сверху обозначаем замыкание множества, причем из контекста будет ясно, в каком пространстве берется эта операция). Поскольку $\pi_{F,X,k}|_W$ — гомеоморфизм, то $\pi_{F,X,k}\left(\prod_{i=1}^{k} \overline{U}_i \times \overline{V}\right)$ — диадический бикомпакт как канонически замкнутое подмножество диадического бикомпакта $F(X)$ [3]. Следовательно, $\prod_{i=1}^{k} \overline{U}_i \times \overline{V}$ — также диадический бикомпакт. Но так как вес последнего не превосходит веса $F(X)$, а $F(X)$ — непрерывный образ D^τ, то бикомпакт $\prod_{i=1}^{k} \overline{U}_i \times \overline{V}$ также является непрерывным образом D^τ [4]. Итак, $P_x = \pi_1\left(\prod_{i=1}^{k} \overline{U}_i \times \overline{V}\right) = \overline{U}_1$ — искомый бикомпакт, где $\pi_1 : X^k \times F(k) \to X$ — проекция на первый сомножитель.

Из покрытия $\{\operatorname{Int} P_x : x \in X\}$ выделим конечное подпокрытие $\{\operatorname{Int} P_{x_j}\}_{j=1}^{s}$. Следовательно, $X = \bigcup_{j=1}^{s} P_{x_j}$ есть непрерывный образ D^τ как конечное объединение бикомпактов, являющихся непрерывными образами D^τ. Пункт а) доказан.

Покажем, что для каждой точки $x \in X$ существует такой конечный набор бикомпактов $P_{1_x}, \ldots, P_{s_x}$, что $x \in \operatorname{Int}\left(\bigcup_{j=1}^{s} P_{j_x}\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} P_{j_x} \subseteq X$ и каждый бикомпакт P_{j_x} является непрерывным образом I^τ. Пусть $f : I^\tau \to F(X)$ — непрерывное отображение «на». Положим $G = \pi_{F,X,k}\left(\prod_{i=1}^{k} U_i \times V\right)$ и $O = \pi_{F,X,k}(W)$. Поскольку $\overline{G} \subseteq O$, то $\overline{f^{-1}G} \subseteq f^{-1}O$. Следовательно, существует конечное множество кубов $\{Q_{1_x}, \ldots, Q_{s_x}\}$, такое, что $\overline{f^{-1}G} \subseteq \subseteq \bigcup Q_{j_x} \subseteq f^{-1}O \subseteq I^\tau$, причем каждый куб гомеоморфен I^τ. Покажем, что множества $P_{j_x} = \pi_1(W \cap \pi_{F,X,k}^{-1}(f(Q_{j_x})))$ — искомые. Действительно, так как $f(Q_{j_x}) \subseteq \pi_{F,X,k}(W)$ и $\pi_{F,X,k}|_W$ — гомеоморфизм, то бикомпакт $f(Q_{j_x})$ гомеоморфен $W \cap \pi_{F,X,k}^{-1}(f(Q_{j_x}))$. Кроме того, $(x_1, \ldots, x_k, a) \in \prod_{i=1}^{k} U_i \times V \subseteq W \cap$ $\cap\, \pi_{F,X,k}^{-1} G \subseteq W \cap \pi_{F,X,k}^{-1}(f(\overline{f^{-1}G})) \subseteq W \cap \pi_{F,X,k}^{-1}(\bigcup f(Q_{j_x})) \subseteq \bigcup (W \cap \pi_{F,X,k}^{-1}(f(Q_{j_x})))$. Таким образом, $x = x_1 \in U_{1_s} \subseteq \bigcup \pi_1(W \cap \pi_{F,X,k}^{-1}(f(Q_{j_x}))) = \bigcup_{j=1}^{s} P_{j_x}$.

Из покрытия $\{\operatorname{Int}\left(\bigcup_{j=1}^{s} P_{j_x}\right) : x \in X\}$ выделим конечное подпокрытие. Следовательно, X покрыт конечным числом бикомпактов, $X = \bigcup_{l=1}^{m} P_l$ и каждый бикомпакт P_l является непрерывным образом I^τ. Иными словами, связный бикомпакт X является непрерывным образом свободной суммы m экземпляров тихоновских кубов I^τ. По лемме следует, что X — непрерывный образ I^τ. Теорема доказана.

Следствие. 1. *Если функтор F удовлетворяет условиям теоремы 1 и $F(n)$ — диадический бикомпакт, то бикомпакты X и $F(X)$ одновременно являются диадическими.*

Следствие 2. *Если функтор F удовлетворяет условиям теоремы 1 и бикомпакт $F(n)$ является непрерывным образом свободной суммы конечного числа тихоновских кубов I^τ, то связные бикомпакты X и $F(X)$ одновременно являются непрерывными образами I^τ.*

Отметим, что для функтора $F = \exp_n$ теорема 1 впервые была получена Л. Б. Шапиро [5].

Для функторов бесконечной степени ситуация качественно иная. Так, например, бикомпакт $\exp D^{\aleph_2}$ не является диадическим, и для неметризуемого бикомпакта X пространство $\exp X$ никогда не является образом тихоновского куба [6]. Не может существовать также для функторов бесконечной степени и аналог теоремы 1. Действительно, поскольку бикомпакт $\exp D^{\aleph_2}$ является открыто-порожденным (но не диадическим), то, согласно теореме А. В. Иванова [7], его суперрасширение $\lambda(\exp D^{\aleph_2})$ является бикомпактом Дугунджи и, следовательно, диадическим [8]. Кроме того, как показал Ван Милл [9], суперрасширение всякого (в том числе не локально связного) невырожденного метрического континуума гомеоморфно гильбертову кирпичу.

В заключение приведем послойный вариант теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть дано непрерывное отображение $f: X \to Y$ и F — мономорфный, сохраняющий пересечения, прообразы, точку и пустое множество функтор конечной степени n. Тогда*

а) *если все слои отображения $F(f)$ — диадические бикомпакты, то все слои отображения f также диадические бикомпакты;*

б) *если все слои отображения $F(f)$ — непрерывные образы тихоновского куба, то все связные слои отображения f — непрерывные образы тихоновского куба.*

Примерами функторов, удовлетворяющих условиям теоремы 1, помимо упомянутого выше функтора гиперсимметрической степени $\exp_n$, являются функторы SP_G^n, P_n, λ_n. Все эти функторы, кроме последнего, удовлетворяют также требованиям, налагаемым на функтор F в теореме 2.

Автор признателен профессору В. В. Федорчуку за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов//Успехи матем. наук. 1981. **36**, вып. 3. 3—62.
2. Басманов В. Н. Ковариантные функторы, размерность и абсолютные ретракты: Канд. дис. М., 1983.
3. Ефимов Б. А. Диадические бикомпакты//Тр. Моск. матем. о-ва. 1965. **14**. 211—247.
4. Федорчук В. В. Произведения и спектры топологических пространств. Ч. I. М., 1979.
5. Шапиро Л. Б. О некоторых свойствах функторов экспоненциального типа// //IV Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1979. 163—164.
6. Шапиро Л. Б. О пространствах замкнутых подмножеств бикомпактов//Докл. АН СССР. 1976. **231**, № 2. 295—298.
7. Иванов А. В. Суперрасширения открыто-порожденных бикомпактов//Докл. АН СССР. 1981. **259**, № 2. 275—278.
8. Haydon R. On problem of Pelczynski: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE (dim 0)//Stud. Math. 1974. **52**, N 1. 23—31.
9. Mill J. van. Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes//Fund. Math. 1980. **107**, N 3. 201—224.

Поступила в редакцию
02.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 3

УДК 512.55

А. О. Назаров

ЛОКАЛИЗАЦИЯ В КАТЕГОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДУЛЕЙ

Введение. В 1973 г. Ламбек и Рэттрей [1] для любой категории $\mathfrak{C}$, замкнутой относительно взятия пределов, ввели понятие функтора локализации $Q_K: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ относительно произвольного объекта K этой