МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет комп'ютерних наук, фізики та математики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу

РОЗРОБКА НАВЧАЛЬНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ»

Кваліфікаційна робота (проєкт)

на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр»

Виконала: студентка
Спеціальності 014 Середня освіта (математика)
Освітньо-професійної програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти Середня освіта (математика)
Демид Анастасія Олександрівна
Керівник кандидат педагогічних наук,
старший викладач Григор'єва В.Б.
Рецензент кандидат фізико-математичних наук,
доцент Валько Н.В.

Херсон – 2020

ЗМІСТ

Вступ …………………………………………………………………. 3

Розділ 1. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з курсу «Основи геометрії»

1.1. Огляд літератури та аналіз сучасного стану проблеми ……. 5

1.2. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з курсу «Основи геометрії» ………………………………………… 6

Розділ 2. Навчальний матеріал для розробки планів практичних занять з курсу «Основи геометрії» ………………………………… 35

Висновки …………………………………………………………….. 49

Список використаних джерел ……………………………………… 50

Додатки …………………………………………………………… 53

ВСТУП

Важливою складовою професійної підготовки майбутнього вчителя математики є навчальна дисципліна "Основи геометрії". Важливими завданнями курсу є забезпечення сприятливих умов для неперервної самоосвіти, наукового пошуку, підвищення рівня математичної підготовки студентів. Курс “Основи геометрії” покликаний розвинути у майбутнього вчителя математики просторову уяву у взаємозв’язку з аналітичними методами, з груповою та структурною точкою зору на геометрію; дати ґрунтовні загальні уявлення про сучасний аксіоматичний метод, елементи евклідового простору, неевклідових геометрій, тобто сформувати достатньо широкий погляд на геометрію та її методи і на елементарну геометрію з точки зору вищої і дати достатні знання й навички для успішного викладання геометрії в школі і кваліфікованого ведення факультативних занять, причому виробити здатність здійснювати це на базі довільного навчального посібника або підручника.

Задачі курсу:

- *методологічна:* викладення основного фактичного (геометричного) матеріалу, щоб студенти мати чітке уявлення про основні геометричні теорії, знали основні вимоги до геометрії як математичної теорії;
- *пізнавальна:* розкрити взаємозв’язок різних геометрій з дійсним простором; дати обґрунтування всім розділам шкільного курсу геометрії;
- *практична:* розвиток у студентів вміння правильно (геометрично) мислити, домагатись повноцінності аргументації, логічності мислення, чіткості математичних міркувань та вміння проводити логічний і методологічний аналіз.

Вміння та навички, якими повинні оволодіти студенти під час вивчення курсу: вміння правильно (геометрично) мислити, домагатись повноцінності аргументації, логічність мислення, чіткість математичних міркувань та вміння проводити логічний і методологічний аналіз.

Мета роботи – розробка навчально-методичного комплексу з навчального модуля «Основи геометрії».

Об'єктом дослідження є процес підготовки майбутніх вчителів математики, а *предметом* – безпосередньо організація навчання дисципліни «Основи геометрії».

Завдання роботи:

1) аналіз навчально-методичної літератури з «Основ геометрії» та складання на основі його списків літературних джерел, що є корисними при вивченні тем дисципліни;

2) розробка планів-конспектів лекційних та практичних занять з курсу;

3) розробка методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять з основ геометрії, зокрема, самостійних робіт;

4) розробка завдань комплексної контрольної роботи для проведення контрольних заходів з тем курсу, а також розробка питань для проведення заліку або екзамену.

Для розв'язування поставлених завдань застосовувалися такі *методи* науково-педагогічного дослідження: теоретичний аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури з проблеми дослідження; вивчення педагогічного досвіду викладачів.

Матеріал роботи може бути використаний студентами та викладачами вищих навчальних закладів.

РОЗДІЛ 1
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ «ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ»

1.1. Огляд літератури та аналіз сучасного стану проблеми

В курсі основ геометрії основним завданням є викладання загальних ідей і принципів, які лежать в основі побудови усієї геометричної системи. Принципові питання про походження аксіом, основних понять та тверджень геометрії, про їх відношення до реального простору, про роль логіки, про наукову структуру та виклад геометрії давно хвилювали математиків та філософів. Після відкриття неевклідової геометрії наукова думка зробила великий крок в питаннях наукових обґрунтувань геометрії. Кожен педагог повинен знати історичний розвиток геометрії, її становлення як науки, логічну будову геометрії, повинен бути знайомим з її науковим обґрунтуванням, яке пов’язане з іменами Евкліда, Д. Гільберта, Г. Вейля, М.І. Лобачевського, Рімана та інших вчених. Майбутній вчитель математики повинен знати і розуміти відмінність змістовного аксіоматичного методу, який панував у науці з часів Аристотеля до другої половини XIX століття, від напівформального та формального. Таким чином, зміст курсу «Основи геометрії» полягає у вивченні аксіоматичного (дедуктивного) методу обґрунтування наукової геометричної системи, а також у можливості цього обґрунтування на основі різних аксіоматичних теорій, у вивченні нових неевклідових геометрій та їх обґрунтуванні, дослідженні їх впливу на структуру шкільного курсу геометрії. Вивчення навчальної дисципліни «Основи геометрії» організовується на принципах кредитно-модульної системи, яка сприяє систематичній і динамічній роботі студентів над засвоєнням досить складної дисципліни, з використанням модульної технології навчання та рейтингового оцінювання якості засвоєння навчального матеріалу.

За навчальним планом спеціальності 014 Середня освіта (математика) вивчення курсу «Основи геометрії» передбачено протягом 5 семестру. Загальний обсяг дисципліни об'єднує усі види навчальної діяльності студента: аудиторні заняття (лекційні, семінарські, практичні), самостійну роботу студентів, контрольні заходи (самостійні роботи, контрольні роботи, тестові завдання, залік або екзамен). Самостійна робота студентів має дві складові: самостійна підготовка до аудиторних занять і підготовка до модульного контролю або екзамену.

Що стосується сучасного стану проблеми методичного забезпечення курсу «Основи геометрії» для студентів спеціальності 014 Середня освіта (математика), то можна зазначити, що комплекси з даної дисципліни, ймовірно, розроблені на відповідних кафедрах закладів вищої освіти педагогічного напрямку, проте, як відомо, доступ до зазначених комплексів мають, як правило, або викладачі випускаючих кафедр, або студенти відповідних вишів.

1.2. Навчальний матеріал для розробки планів лекційних занять з курсу «Основи геометрії»

До теми « Історичний огляд обґрунтування геометрії»

Перші відомості про геометрію були здобуті цивілізаціями Стародавнього Сходу – в Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії – у зв'язку з розвитком землеробства. Геометрія на той час мала емпіричний характер і являла собою набір часткових розв'язків окремих геометричних задач. Так, в II тисячолітті до н.е. єгиптяни уміли:

а) Обчислювати площу трикутника;

б) Обчислювати об'єм чотирикутної зрізаної піраміди;

в) Знаходити площу S круга радіуса R за формулою $S=\left(\frac{16}{9}R\right)^2$, звідки отримуємо достатньо точне значення $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2\approx 3,16\ldots$.

У Вавилоні знали вже про теорему Піфагора. Доведень жодних не було, а існували лише правила: «Роби так…».

В Стародавній Греції геометрія почала розвиватися в VII – VI ст. до н.е. під впливом єгиптян. За легендою, батьком грецької математики є представник мілетської школи знаменитий філософ Фалес (640 – 548 рр. до н.е.). Фалес довів такі геометричні теореми:

1) властивості кутів при основі рівнобедреного трикутника;
2) властивості вертикальних кутів та інші теореми.

В подальшому геометрами Стародавньої Греції були доведені майже всі теореми сучасного шкільного курсу геометрії.

В школі Піфагора (біля 570 – 471 рр. до н.е.) математика займала найважливіше місце. Піфагорійці відкрили такі геометричні факти:

1) довели теорему про суму кутів трикутника;
2) довели теорему Піфагора;
3) встановили існування п'яти типів правильних многогранників;
4) встановили існування несумірних відрізків (учень Піфагора – Гіппас).

Демокріт (470 – 370 рр. до н.е.) довів теореми про об'єм піраміди і конуса. Евдокс (410 – 356 рр. до н.е.) побудував геометричну теорію пропорцій, яка заміняла грекам теорію ірраціональних чисел. Евдокс відкрив також *метод вичерпування*: «Якщо від величини A відняти $\frac{1}{2}A$ або більше, з остачею пробробити теж саме і т.д., то можна отримати таку величину, яка менше будь-якої наперед заданої». Цим методом Евдокс знаходить об'єм піраміди, конуса і кулі. Учень Евдокса – Менехм – відкрив конічні перерізи, які потім детально вивчав Аполлоній (256 – 170 рр. до н.е.). Архімед (287 – 212 рр. до н.е.) обчислив площу поверхні кулі і деяких інших фігур та об'єми ряду тіл. Він знайшов наближене значення числа $\pi \left(\pi = \frac{22}{7} = 3{,}143\ldots\right)$.

Задача про побудову системи геометричних знань була поставлена стародавніми грецькими філософами Платоном (429 – 348 рр. до н.е.) та Аристотелем (348 – 322 рр. до н.е.). Останньому, який є засновником формальної логіки, належить ідея побудови геометрії у вигляді ланцюга тверджень, які випливають одне з одного на основі лише одних правил логіки. В кінці III ст. до н.е. виникла потреба розташувати весь зібраний геометричний матеріал в логічному порядку. Цю задачу спробували вирішити (Гіппократ, Федій та ін.) багато грецьких авторів, але їх твори не дійшли до нашого часу, а після появи «Початків» Евкліда були забуті.

1. Евклід (330 – 275 рр. до н.е.) – учень школи Платона, жив в Александрії (Єгипет). В своїх «Початках» він дав систематичне викладення геометрії настільки досконало, що по цих працях вивчалась геометрія майже до XIX століття. «Початки» Евкліда складаються з 13 книг. В перших 6 книгах викладається планіметрія. В книгах 7-9 арифметика подається в геометричному тлумаченні. В книзі 10 викладена теорія несумірних величин. Книги 11-13 присвячені вивченню правильних многогранників.

Кожна книга починається з означення тих понять, які в ній зустрічаються. Наприклад, в 1-й книзі дано 23 означення. Наведемо деякі з низ:

1. Точка є те, що немає частин.
2. Лінія є довжина без ширини.
3. Межі лінії суть точки.
4. Пряма є така лінія, яка однаково розташована по відношенню до всіх своїх точок.
5. Поверхня є те, що має тільки довжину і ширину.
6. Межі поверхні суть точки.

7. Площина є поверхня, яка однаково розташована по відношенню до всіх прямих, які лежать на ній.

Далі Евклід наводить постулати і аксіоми, які приймаються без доведень.

Постулати.

I. Вимагається, щоб від кожної точки до всякої іншої точки можна було провести пряму.

II. І щоб кожну пряму можна було необмежено продовжити.

III. І щоб від довільного центра можна було б описати коло довільного радіуса.

IV. І щоб всі прямі кути були рівні.

V. І щоб кожний раз, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними внутрішні односторонні кути, сума яких менше двох прямих, ці прямі перетиналися з того боку, з якого ця сума менше двох прямих.

Аксіоми.

I. Рівні окремо третьому рівні між собою.

II. І якщо до рівних додати рівні, то отримаємо рівні.

III. І якщо від рівних віднімемо рівні, то отримаємо рівні.

…………………………………………………………

…………………………………………………………

……………………………………………………….…

VII. І, які суміщаються, рівні.

Яка різниця між постулатами і аксіомами не ясно. Далі Евклід розташовує теореми в такій послідовності, щоб кожну з них можна було б довести, використовуючи лише попередні теореми, постулати і аксіоми.

Критика системи Евкліда. «Початки» Евкліда зіграли значну роль в історії математики. Вони перекладені на всі мови світу. Лише після 1482 року вони витримали біля 500 видань. Майже до початку XIX століття всі вчились математиці по Евкліду.

Евклід першим сформулював задачу обґрунтування геометрії. Логічна побудова ним геометрії була зроблена досить точно. Протягом багатьох століть строгість доведень Евкліда була зразком для наслідування. Однак з точки зору сучасної математики викладення «Початків» є недосконалим. Багато означень неясні, наприклад, означення прямої; інші містять в собі такі поняття, які самі повинні бути означенні («довжина», «ширина», «межа» тощо). Щодо постулатів і аксіом, то список їх явно недостатній, щоб на основі їх побудувати геометрію строго логічним шляхом. Наведемо декілька прикладів.

а) Ще Гаусс помітив, що аксіоми і постулати Евкліда не дають можливості виразити такі відношення: «точка прямої лежить між двома іншими точками», «дві точки лежать по один бік (по різні боки) від прямої», «точка лежить всередині трикутника» та інші.

б) За змістом аксіоми VII рівність фігуру Евкліда визначається за допомогою руху. Між тим означення руху не дається і властивості рухів в аксіомах не відображені.

в) Якщо одне з двох кіл проходить через внутрішню і зовнішню точки відносно другого кола, то Евклід мовчки припускає, що ці кола перетинаються. Точно так саме він припускає, що пряма, яка проходить через внутрішню точку кола, перетинає його.

V-й постулат Евкліда відрізняється від інших своєю складністю. Перші 28 теорем Евклід довів без використання V-го постулата. Протягом 2000 років були багато чисельні спроби вивести цей постулат з решти постулатів і аксіом (Прокл – V вік до н.е.; Омар Хайям – 1048 – 1123 рр.; Валіс – XVII ст.; Саккері і Ламберт – XVIII ст.; Лежандр – 1752 – 1833 рр.).

До теми «П'ятий постулат Евкліда»

Дві прямі називаються *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільної точки.

Теорема про зовнішній кут трикутника. Зовнішній кут трикутника більше довільного його кута, який з ним не суміжний.

Лема 2.1. Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути (або відповідні кути) рівні, то прямі не перетинаються.

Теорема 2.1. Якщо має місце п’ятий постулат, то через кону точку M, яка не лежить на прямій a, проходить тільки одна пряма, яка паралельна прямій a.

Теорема 2.2. Якщо прийняти, що через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній, то справедливий п’ятий постулат Евкліда.

Аксіома паралельних прямих: через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить не більше ніж одна пряма, яка паралельна даній.

Твердження: сума кутів кожного трикутника рівна двом прямим.

Теорема 2.3. Якщо прийняти, що сума кутів кожного трикутника рівна $2d$, де d – міра прямого кута, то має місце п’ятий постулат Евкліда.

Лема 2.2. Для довільного трикутника ABC можна побудувати трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб $\sigma_{ABC}=\sigma_{A_1B_1C_1}$ і $\widehat{A_1}\leq\frac{1}{2}\widehat{A}$, де символом $\widehat{A}$ позначається кут A, тобто $\angle A$.

Теорема 2.4 *(Саккері-Лежандра).* Сума кутів довільного трикутника не більше $2d$.

Теорема 2.5 *(Саккері-Лежандра).* Якщо в одному трикутнику сума кутів дорівнює $2d$, то сума кутів довільного трикутника дорівнює $2d$.

До теми «Система аксіом Гільберта»

1. Згідно Гільберту задано три множини. Елементи першої множини називаються *точками*, другої – *прямими*, а третьої – *площинами.* Точки будемо позначати літерами $A,B,C,\ldots$; прямі – $a,b,c,\ldots$; площини – $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$. Елементи даних множин знаходяться в певних відношеннях: «належності», «лежати між», «конгруентності».

2. Кожна підмножина точок називається *напівплощиною* площини α з межею a

3. Трикутник ABC називається *конгруентним* трикутнику $A'B'C'$ (позначається $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$), якщо $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$.

Список Гільберта містить 20 аксіом, які поділені на 5 груп.

Група 1. Аксіоми належності.

Аксіоми цієї групи визначають властивості взаємного розташування точок, прямих і площин, які виражаються словом «належати» (або «лежати на», «проходити через»). Ця група містить вісім аксіом.

I_1. Які б не були дві точки $A, B,$ існує пряма A, яка проходить через ці точки.

I_2. Які б не були дві точки $A, B,$ існує не більш однієї прямої, яка проходить через ці точки.

I_3. На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують хоча б три точки, які не лежать на одній прямій.

I_4. Які б не були три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій, існує площина α, яка проходить через ці точки. На кожній площині лежить хоча б одна точка.

I_5. Які б не були три точки, які не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, яка проходить через ці точки.

I_6. Якщо дві точки A і B прямої a лежать в площині α, то кожна точка прямої a лежить в площині α.

I_7. Якщо дві площини α і β мають спільну точку A, то вони мають принаймні ще одну спільну точку B.

I_8. Існують принаймні чотири точки, які не лежать в одній площині.

Виходячи з цих аксіом, можна довести ряд теорем, більшість з яких в шкільному курсі геометрії не доводяться, оскільки вони наочно очевидні. Наведемо деякі з них:

1) Дві прямі мають не більше однієї спільної точки.

2) Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають спільну пряму на якій лежать всі спільні точки цих двох площин.

3) Через пряму і точку, що не лежить на ній, так само як через дві прямі, що перетинаються, проходить одна і тільки одна площина.

4) На кожній площині існують три точки, які не лежать на одній прямій.

Група 2. Аксіоми порядку.

Припускається, що точка на прямій може знаходитись у відомому відношенні до двох інших точок тієї ж прямої; це відношення виражається словами «лежати між». Якщо точка B лежить між точкою A і точкою C, то цей факт записується так: $A-B-C$. При цьому повинні виконуватись чотири аксіоми:

II_1. Якщо $A-B-C$, то A,B,C – різні точки однієї прямої і $C-B-A$.

II_2. Які б не були дві точки A і B, існує принаймні одна точка C на прямій AB така, що $A-B-C$.

II_3. Серед довільних трьох точок прямої існує не більше однієї точки, яка лежить між двома іншими.

II_4. (аксіома Паша). Нехай A,B,C – три точки, які не лежать на одній прямій, a – пряма в площині ABC, яка не проходить ні через жодну з точок A,B,C. Тоді, якщо пряма a проходить через точку відрізка AB, то вона проходить також через точку відрізка AC або BC.

Теорема. Пряма a, яка лежить в площині α, розділяє множину точок цієї площини, які не лежать на прямій a, на дві непусті підмножини так, що коли точки A і B належать одній підмножині, то відрізок AB немає спільних точок з прямою a; якщо ж ці точки належать різним підмножинам, то відрізок AB має спільну точку з прямою a.

Група 3. Аксіоми конгруентності.

Припускається, що відрізок (кут) може знаходитись у відношенні «конгруентності» або «рівності» до деякого відрізка (кута). Це відношення позначаються символом «¿».

III_1. Якщо дані відрізок AB і промінь, який виходить з точки A', то існує точка B', яка належить даному променю така, що $AB=A'B'$.

III_2. Якщо $A'B'=AB$ і $A''B''=AB$, то $A'B'=A''B''$.

III_3. Нехай $A-B-C$ і $A'-B'-C'$, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, тоді $AC=A'C'$.

III_4. Нехай дані $\angle hk$ і прапор (O', h', λ'). Тоді в напівплощині λ' існує один і тільки один промінь k', який виходить з точки O', такий що $\angle hk = \angle h'k'$. Кожний кут конгруентний сам собі.

III_5. Нехай A, B, C – три точки, які не лежать на одній прямій, A', B', C' – три точки, які також не лежать на одній прямій. Якщо при цьому $A'B'=AB$, $AC=A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.

Деякі теореми, які випливають з аксіом конгруентності:

1) Відношення конгруентності відрізків є відношенням еквівалентності на множині відрізків.

2) У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

3) Перша, друга і третя ознаки рівності трикутників.

4) Відношення конгруентності кутів є відношенням еквівалентності на множині кутів.

5) Зовнішній кут трикутника більше кожного кута, несуміжного з ним.

6) В кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут і навпаки проти більшого кута лежить більша сторона.

7) Довільний відрізок має одну і тільки одну середину.

8) Довільний кут має одну і тільки одну бісектрису.

Група 4. Аксіоми неперервності.

IV_1. (Аксіома Архімеда). Нехай AB і CD – які-небудь відрізки. Тоді на прямій AB існує скінчена множина таких точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, що будуть виконуватись умови:

а) $A-A_1-A_2, A_1-A_2-A_3, \ldots, A_{n-2}-A_{n-1}-A_n$;

б) $AA_1=A_1A_2=\ldots=A_{n-1}A_n=CD$;

в) $A-B-A_n$;

IV_2. (Аксіома Кантора). Нехай на довільній прямій a задана нескінчена послідовність відрізків $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$ з яких кожний наступний лежить всередині попереднього і, крім того, для довільного відрізка CD знайдеться натуральне число n таке, що $A_n B_n < CD$. Тоді на прямій a існує точка M, яка належить кожному з відрізків даної послідовності.

Група 5. Аксіома паралельності.

V. Нехай a – довільна пряма, A – точка, яка не лежить на цій прямій. Тоді в площині яка визначається точкою A і прямою a, існує не більше однієї прямої, яка проходить через A і не перетинає a.

До теми «Елементи геометрії Лобачевського»

1. Пряма AB називається *паралельною* прямій CD, якщо ці прямі не мають спільник точок і, які б не були точки P і Q, що лежать відповідно на прямих AB і CD, кожний внутрішній промінь кута QPB перетинає промінь QD. Якщо пряма AB паралельна CD, то пишуть $AB \parallel CD$.

2. Довільний гострий кут є кутом паралельності в деякій точці відносно даної прямої.

3. Опуклий чотирикутник називається *двопрямокутником,* якщо два кути, які належать одній стороні, прямі.

4. Двопрямокутник з рівними бічними сторонами називається *чотирикутником Саккері.*

Аксіома Лобачевського. Нехай a – довільна пряма; A – точка, яка не лежить на цій прямій. Тоді в площині, яка визначається точкою A і прямою a, існує не менше двох прямих, які проходять через точку A і не перетинають пряму a.

Теорема 4.1. Якщо прямі AB і CD не мають спільних точок і існують точки P і Q такі, що $P \in AB$ і $Q \in CD$, і довільний внутрішній промінь кута QPB перетинає промінь QD, тоді $AB \parallel CD$.

Теорема 4.2. Нехай AB – довільна направлена пряма, а M – точка, яка не лежить на ній. Тоді в площині MAB існує одна і тільки одна пряма CD, яка проходить через точку M і паралельна прямій AB, тобто $CD \parallel AB$.

Теорема 4.3. Сума кутів довільного трикутника в площині Лобачевського менше $2d$.

Наслідок. Сума кутів трикутника в площині Лобачевського не є сталою, тобто вона не одна і та ж для всіх трикутників.

Теорема 4.4. Сума кутів опуклого чотирикутника менше $4d$.

Теорема 4.5. Якщо три кути одного трикутника відповідно рівні трьом кутам другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Властивості чотирикутника Саккері:

8. Якщо $ABCD$ – чотирикутник Саккері з основою AB, то $\angle C = \angle D$ і кожний з кутів C і D гострий.

9. Якщо в двопрямокутнику $ABCD$ з основою AB справедлива нерівність $AD < BC$, то $\angle C < \angle D$.

10. Якщо в двопрямокутнику $ABCD$ з основою AB виконується $\angle C < \angle D$, то тоді $AD < BC$.

До теми «Розташування прямих на площині Лобачевського»

1. Дві прямі (ненаправлені) називаються *паралельними,* якщо на них так можна вибрати напрямки, щоб вони були паралельними.

2. Дві прямі на площині Лобачевського називаються *розбіжними (або зверх паралельними)*, якщо вони не перетинаються і не паралельні.

Лема 5.1. Якщо $AB \parallel CD$, то існує вісь симетрії прямих AB і CD.

Теорема 5.1. Якщо AB і CD – дві прямі на площині Лобачевського такі, що $AB \parallel CD$, то $CD \parallel AB$.

Теорема 5.2. Дві прямі паралельні третій в одному і тому ж напрямку, паралельні між собою в тому самому напрямку, тобто якщо $AB \parallel EF$ і $CD \parallel EF$ і прямі AB і CD не співпадають, то $AB \parallel CD$.

Теорема 5.3. Дві прямі, які мають спільний перпендикуляр, розбігаються.

Наслідок. На площині Лобачевського не існує спільного перпендикуляра до двох паралельних прямих.

Зауваження. Якщо дві прямі мають спільний перпендикуляр, то він єдиний, а ці прямі розбігаються.

Лема 5.2. Нехай промені PP' і QQ' лежать в одній півплощині з межею$PQ, \angle PQQ'$ прямий, а кут $\angle QPP'$ прямий або тупий. Тоді якщо M – довільна точка променя PP', а H – проекція цієї точки на пряму QQ', то функція $MH = f(MP)$ є монотонною, нескінченно зростаючою функцією.

До теми «Пучки прямих на площині Лобачевського»

1. *Коло* – фігура, яка містить всі точки площини, які рівновіддалені від деякої фіксованої точки.

2. Пряма AB, де $A \in a, B \in b$ називається *січною рівного нахилу* до прямих a і b, якщо відрізок AB утворює з цими прямими рівні внутрішні односторонні кути.

3. *Еквідістантою* називається фігура, яка містить всі точки напівплощини з межею u, рівновіддалених від цієї прямої.

4. Кожний елемент фактор-множини Ω / Δ називається *орициклом (або граничною лінією).* Прямі пучка називаються *вісями орицикла.*

На площині Лобачевського існує три типа пучків:

а) *пучок прямих, які перетинаються,* тобто множина всіх прямих площини, які проходять через одну точку;

б) *пучок розбіжних прямих,* тобто множина всіх прямих площини, які перпендикулярні до даної прямої;

в) *пучок паралельних прямих,* тобто множина всіх направлених прямих, які паралельні даній направленій прямій.

Властивості кола, які відносяться до абсолютної геометрії:

1) Коло симетричне відносно довільної своєї осі.

2) В кожній точці кола існує дотична, яка перпендикулярна вісі і яка проходить через точку дотикання.

3) Пряма, яка містить хорду кола, відмінну від діаметра, є січна рівного нахилу до осей, які проходять через кінці хорди.

4) Серединний перпендикуляр до будь-якої хорди кола буде її віссю.

Теорема 6.1. Довільна пряма, яка лежить в площині еквідістанти, перетинається з еквідістантою не більш, ніж у двох точках.

Властивості еквідістанти.

1) Еквідістанта симетрична відносно довільної своєї осі.

2) В кожній точці еквідістанти існує дотична, яка перпендикулярна до вісі, що проведена через точку дотику.

3) *Хордою еквідістанти* називається довільний відрізок, який з'єднує дві її точки. Кожна пряма, яка містить хорду еквідістанти, є січною рівного нахилу до осей, що проходять через кінці хорди.

4) Серединний перпендикуляр до довільної хорди еквідістанти є її віссю.

Лема 6.1. Через кожну точку однієї з двох паралельних прямих проходить одна і тільки одна січна рівного нахилу до цих прямих.

Теорема 6.2. Довільна пряма, яка лежить в площині орициклу, перетинається з орициклом не більше, ніж в двох точках.

До теми «Загальні питання аксіоматики»

1. *Бінарним відношенням* між елементами множин A і B називається довільна підмножина ρ множини $A\times B$, тобто $\rho\subset A\times B$.

2. $n-¿$*арним відношенням* між елементами множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається підмножина Δ декартового добутку $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$, тобто $\Delta\subset A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$.

3. Якщо $T\neq\varnothing$, то кажуть, що елемент $\sigma\in T$ визначає на множинах E, F, G *структуру роду* T (точніше, *математичну структуру роду* T)

4. *Теорія структур роду* T – це множина $J(T)$ тверджень (теорем), кожне з яких є логічним наслідком аксіом системи Σ, що визначають T.

5. Система аксіом $A_1, A_2, \ldots, A_n$, яка визначає структуру роду T, називається *змістовно несуперечливою (або семантично несуперечливою),* якщо дана структура має модель.

6. Система аксіом $A_1, A_2, \ldots, A_n$, яка визначає структуру роду T, називається *внутрішньо несуперечливою (або синтаксично несуперечливою),* якщо не існує такого твердження, яке разом зі своїм запереченням логічно випливають з даної системи аксіом.

7. Моделі $M^{'}$ і $M^{''}$ називаються *ізоморфними,* якщо існує така бієкція $f: M^{'} \to M^{''}$, що для довільних $x^{'}, y^{'}, \ldots, v^{'} \in M^{'}$, має місце рівносильність

$x^{'}, y^{'}, \ldots, v^{'} \in \Delta_j^{'} \quad (f(x^{'}), f(y^{'}), \ldots, f(v^{'})) \in \Delta_j$

8. Ізоморфізм множини M (на якому визначена структура σ) на себе називається *автоморфізмом* цієї множини.

9. Система аксіом $A_1, A_2, \ldots, A_n$несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика дійсних чисел.

10. Аксіома A системи аксіом Σ називається *залежною* від інших аксіом системи Σ, якщо A є логічним наслідком аксіом системи $\Sigma^{'} = \Sigma ¿ A\} ¿$.

11. Якщо аксіома A залежна від інших аксіом системи Σ, то система аксіом $\Sigma^{¿}$ *суперечлива,* тобто не існує її моделей

12. Система аксіом називається *категоричною,* якщо довільні її дві моделі ізоморфні.

13. Якщо система аксіом категорична, то теорія $J(\Sigma)$ називається *однозначною,* в протилежному випадку $J(\Sigma)$ називається *багатозначною.*

Нехай на множині $E \neq \varnothing$ задана алгебраїчна операція (*внутрішній закон композиції)*: $\varphi: E \times E \to E$.

Тут визначена підмножина $\Delta \subset E \times E \times E$, утворена такими елементами $(a, b, c) \in E \times E \times E$, для яких $\varphi(a, b) = c$. Ми бачимо, що тернарне $(n=3)$ відношення Δ породжує внутрішній закон композиції g.

Розглянемо на множині E *зовнішній закон композиції* з множиною операторів Λ:

$g: \Lambda \times E \to E$

(при цьому ми будемо використовувати запис $g(\lambda, a) = \lambda a$, де $\lambda \in \Lambda, a \in E$). В цьому випадку визначена підмножина $\Delta \subset \Lambda \times E \times E$, утворена тими елементами $(\lambda, a, b) \in \Lambda \times E \times E$, для яких $\lambda a = b$. Очевидно, тернарне відношення Δ породжує зовнішній закон композиції g.

Приклад 1 (структура групи). База містить одну не порожню множину E, система відношень складається з одного відношення Δ, яке повинно задовольняти чотирьом аксіомам:

A_1: Δ – алгебраїчна операція на множині E;

A_2: для довільних елементів $a,b,c \in E$ маємо $\Delta(\Delta(a,b),c)=\Delta(a,\Delta(b,c))$ (асоціативність);

A_3: існує такий елемент $e \in E$, що для кожного $a \in E$ має місце $\Delta(a,e)=\Delta(e,a)=a$ (існування нейтрального елемента);

A_4: для кожного елемента $a \in E$ існує елемент $a' \in E$ такий, що $\Delta(a,a')=\Delta(a',a)=e$ (існування елемента a', симетричного елементу a).

Приклад 2 (структура евклідового простору за Гільбертом). Згідно Гільберту, база структури евклідового простору складається з трьох множин E,F,G. Елементи першої множини E називаються *точками,* елементи другої множини F – *прямими,* а елементи множини G – *площинами.*

На системі множин E,F,G існують відношення $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$, які визначені відповідно словами «лежати на», «лежати між» і «рівні». Список аксіом Гільберта містить двадцять аксіом: $I_1-I_8, II_1-II_4, III_1-III_5, IV_1, IV_2, V$. Цю систему аксіом позначимо через Σ_H.

Приклад 3 (структура простору Лобачевського). База структури евклідового простору складається з трьох множин E,F,G. Елементи першої множини E називаються *точками,* елементи другої множини F – *прямими,* а елементи множини G – *площинами.*

На системі множин E,F,G існують відношення $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$, які визначені відповідно словами «лежати на», «лежати між» і «рівні». Список аксіом Гільберта містить двадцять аксіом: $I_1-I_8, II_1-II_4, III_1-III_5, IV_1, IV_2, V^{¿}$. Цю систему аксіом позначимо через Σ_Λ.

Твердження. Система аксіом Гільберта першої групи несуперечлива.

Зауваження. Неважко бачити, що система аксіом Σ неповна, якщо існує таке твердження A, яке сформульоване в термінах теорії $J(\Sigma)$ і яке неможливо ні спростити, ні вивести з Σ. Якщо ж для кожного твердження A: або A, або A виводяться з Σ, то Σ – повна система аксіом.

До теми «Система аксіом Вейля евклідової геометрії»

1. Нехай задані: V – тривимірний векторний простір над полем дійсних чисел; E – непуста множина, елементи якої називаються *точками*; відображення $\sigma : E \times E \to V$ (вектор $\sigma(A, B)$ позначається $\overrightarrow{AB}$); $\tilde{g}$ – множина відображень виду $V \times V \to R$.

Білінійною формою, яка визначена на векторному просторі V, називається відображення $g : V \times V \to R$, лінійне по кожному аргументу, тобто кожній упорядкованій парі векторів $\vec{x}, \vec{y}$ ставиться у відповідність дійсне число $g(\vec{x}, \vec{y})$ таке, що виконуються рівності:

$$g(\alpha \vec{x_1} + \beta \vec{x_2}, \vec{y}) = \alpha g(\vec{x_1}, \vec{y}) + \beta g(\vec{x_2}, \vec{y}) (8.1)$$

$$g(\vec{x}, \alpha \vec{y_1} + \beta \vec{y_2}) = \alpha g(\vec{x}, \vec{y_1}) + \beta g(\vec{x}, \vec{y_2}) (8.2)$$

2. Білінійна форма g називається *симетричною,* якщо для довільних векторів $\vec{x}, \vec{y} \in V$ виконується рівність $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$.

3. Симетрична білінійна форма g називається *додатно-визначеною,* якщо $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ для довільного ненульового вектора $\vec{x} \in V$.

4. Множина E називається *тривимірним евклідовим простором* E_3, якщо виконуються такі аксіоми:

1) Для кожної точки $A \in E$ і довільного вектора $\vec{p} \in V$ існує одна і тільки одна точка X така, що $\overrightarrow{AX} = \vec{p}$.
2) Для довільних точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
3) Множина $\tilde{g}$ є множина додатно-визначених білінійних форм таких, що коли $g(\vec{x}, \vec{y}) \in \tilde{g}$, то $\tilde{g} = \{\lambda g\}$, де $\lambda \in R_{+¿¿}$.[1]

Сформульовані аксіоми називаються *аксіомами Вейля* і позначаються через Σ_W.

5. Нехай L є підпростором векторного простору V. Розглянемо на множині E бінарне відношення Δ, яке визначається таким чином:

$$(A, B) \in \Delta \quad \overrightarrow{AB} \in L . (8.3)$$

Неважко бачити, що відношення Δ є еквівалентність. Розглянемо далі фактор-множинуE/Δ, тобто множину класів еквівалентності по відношенню Δ. Якщо $L = L_1$, тобто L є одновимірний підпростір, то кожний

1

елемент множини E/Δ називається *прямою лінією,* а коли $L=L_2$, тобто L є двовимірний підпростір, то кожний елемент множини E/Δ називається *площиною.*

6. Дві прямі називаються *паралельними,* якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок.

7. Дві площини називаються *паралельними,* якщо вони не мають спільних точок.

Теорема 8.1. Система аксіом 1-3 Вейля несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика дійсних чисел.

Лема 8.1. Якщо дві прямі лежать в одній площині і їх напрямні підпростори не співпадають, то ці прямі перетинаються.

Теорема 8.2. Дві різні прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли вони мають спільний напрямний підпростір.

Теорема 8.3. Через дану точку A, яка не лежить на даній прямій l проходить одна і тільки одна пряма, яка паралельна прямій l.

Наслідок: в теорії $J(\Sigma_W)$ має місце аксіома паралельності, тобто аксіома V Гільберта.

До теми «Теорія вимірювання довжин відрізків та площ многокутників»

1. Нехай L – множина всіх відрізків, $R_{+¿¿}$ – множина всіх додатних дійсних чисел. Будемо говорити, що встановлено *вимірювання відрізків,* якщо визначено відображення $l:L\rightarrow R_{+¿¿}$, яке задовольняє такі аксіоми:

1) якщо $AB=A'B'$, то $l(AB)=l(A'B')$, де $AB, A'B'\in L$;
2) якщо $A-B-C$, то $l(AB)+l(BC)=l(AC)$;
3) існує відрізок PQ, такий що $l(PQ)=1$.

2. Число $l(AB)$ називається *мірою (довжиною)* відрізка AB.

3. Відрізок PQ, який задовольняє умову 3) називається *одиничним відрізком* або *лінійною одиницею.*

4. *Ламаною лінією* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається фігура, яка побудована з відрізків $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Ці відрізки називаються *ланками* ламаної.

5. Ламана називається *простою,* якщо її несуміжні ланки немають спільних точок.

6. Ламана $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається *замкненою,* якщо її кінці співпадають, тобто $A_1 = A_n$.

7. *Простим многокутником* називається об'єднання простої замкненої ламаної з внутрішньою областю.

8. Многокутник називається *орієнтованим,* якщо вказаний порядок обходу його вершин. Орієнтований многокутник позначається так:

$\vec{F} = \overrightarrow{A_1, A_2, \ldots, A_n}$

9. Нехай $\vec{F} = \overrightarrow{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ – орієнтований $n-¿$кутник, O – довільна точка площини σ. Число

$[\vec{F}] = \vec{r}_1 \circ \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3 + \ldots + \overrightarrow{r_{n-1}} \circ \vec{r}_n + \vec{r}_n \circ \vec{r}_1$

де $\vec{r}_i = \overrightarrow{O A_i}, i = 1, 2, \ldots, n$, називається *характеристикою многокутника.*

10. Нехай M – множина всіх многокутників евклідової площини. Кажуть, що встановлено *вимірювання площ* многокутників, якщо визначено відображення $S : M \rightarrow R_{+¿¿}$, яке задовольняє такі аксіоми:

1) Якщо многокутники F і F' рівні, то $S(F) = S(F')$.
2) Якщо $F = F_1 + F_2$, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.
3) $S(P_0) = 1$, де P_0 – квадрат, побудований на одиничному відрізку як на стороні.

Теорема 9.1. При довільному виборі одиничного відрізка PQ існує відображення $g : L \rightarrow R_{+¿¿}$, яке задовольняє три аксіоми вимірювання відрізків, причому $g(AB)$ є число, яке отримане в результаті вимірювання відрізка AB.

Лема 9.1. Нехай встановлено вимірювання відрізків з одиницею вимірювання PQ. Якщо точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$ розташовані так, що $A_0 - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \ldots, A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$ і $A_0 A_1 = A_1 A_2 = \ldots = A_{n-1} A_n = PQ$, то $|A_0 A_n| = n$.

Лема 9.2. Нехай встановлено вимірювання відрізків. Якщо $AB < CD$, то $|AB| < |CD|$.

Лема 9.3. Нехай встановлено вимірювання відрізків. Якщо точка O – середина відрізка AB, то $|AO|=|OB|=\frac{1}{2}|AB|$.

Теорема 9.2 (теорема єдиності довжини відрізка). Якщо вибраний одиничний відрізок PQ, то існує не більше одного відображення $l:L \to R_{+¿¿}$, яке задовольняє три аксіоми вимірювання відрізків.

Теорема 9.3. Яке б не було дійсне число $a>0$, то при даному виборі одиничного відрізка існує відрізок, довжина якого рівна a.

Теорема 9.4. Відображення $S:M \to R_{+¿¿}$ за законом

$$S(F)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{[F]}\right|$$

задовольняє аксіоми 1), 2) і 3) вимірювання площ.

До теми «Рівновеликі та рівноскладені многокутники. Об’єм многогранника»

1. Два многокутники називаються *рівновеликими,* якщо їх площі рівні.
2. Два многокутники F і F' називаються *рівноскладеними*, якщо їх можна розкласти на одне і те ж число рівних многокутників.
3. Говорять, що встановлено *вимірювання об’ємів многогранників,* якщо визначено відображення $V:M \to R_{+¿¿}$, яке задовольняє такі аксіоми:
   1) Якщо $F=F'$, то $V(F)=V(F')$.
   2) Якщо $F=F_1+F_2$, то $V(F)=V(F_1)+V(F_2)$.
   3) Якщо P_0 – куб з ребром, довжина якого рівна 1, то $V(P_0)=1$.
4. Два многогранника називаються *рівновеликими,* якщо їх об’єми рівні.
5. Два многогранника називаються *рівноскладеними,* якщо їх можна розкласти на одне і те ж число відповідно рівних многогранників.

Теорема 10.1. Якщо $S:M \to R_{+¿¿}$ – відображення, яке задовольняє аксіоми 1), 2) і 3) вимірювання площ, то $S(P)=xy$, де P – прямокутник, сторони якого рівні x і y.

Теорема 10.2. Якщо $S: M \to R_{+}$ – відображення, яке задовольняє аксіоми 1), 2) і 3) вимірювання площ, то $S(T)=\frac{1}{2}xy$, де T – трикутник, x – одна з його сторін, а y – відповідна висота.

Теорема 10.3 *(теорема єдиності).* Якщо вибраний одиничний відрізок, то існує не більш одного відображення $S: M \to R_{+}$, яке задовольняє аксіоми 1, 2 і 3.

Наслідок 10.1. При довільному способі розкладання многокутника F на скінченну множину трикутників сума площ цих трикутників одна і та ж.

Наслідок 10.2. Якщо вершини многокутника $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в прямокутній системі координат мають координат $A_i(x_i, y_i)$, де $i=1,2,\ldots,n$, то

$$S(A_1 A_2 \ldots A_n)=\frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_n \\ y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix} \right|$$

Теорема 10.3 *(теорема Бойяї-Гервіна).* Якщо два многокутника рівновеликі, то вони рівноскладені.

Лема 10.1. Відношення рівноскладеності є відношенням еквівалентності, тобто воно рефлексивне, симетричне і транзитивне.

Лема 10.2. Кожний трикутник рівноскладений з деяким трикутником.

Лема 10.3. Два паралелограми, які мають спільну основу та однакові площі, рівноскладені.

Лема 10.4. Два прямокутника, які мають рівні площі, рівноскладені.

Лема 10.5. Кожний многокутник рівноскладений з деяким прямокутником.

Теорема 10.4. В евклідовому просторі існує хоча б одне відображення $V: M \to R_{+}$, яке задовольняє аксіоми 1,2 і 3 вимірювання об’ємів многогранників.

Теорема 10.5. Якщо вибраний одиничний відрізок, то існує не більш одного відображення $V:M\to R_{+¿¿}$, яке задовольняє аксіоми 1, 2 і 3 вимірювання об'ємів многогранників.

Теорема 10.6. Якщо $V:M\to R_{+¿¿}$ – відображення, яке задовольняє аксіоми 1, 2 і 3, то $V(P)=xyz$, де P – прямокутний паралелепіпед з вимірюваннями x,y і z.

Теорема 10.7. Нехай $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ – міри двогранних кутів многогранника P, а $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ – міри двогранних кутів многогранника P'. Якщо многогранники P і P' рівноскладені, то існують такі цілі додатні числа $m_1,m_2,\ldots,m_r$ і $n_1,n_2,\ldots,n_s$, і таке ціле (додатне, від'ємне або рівне 0) число c, що

$$m_1\alpha_1+\ldots+m_r\alpha_r-(n_1\beta_1+\ldots+n_s\beta_s)=\pi c.$$

До теми «Поняття про сферичну геометрію»

Сферична геометрія, тобто геометрія на сфері має «небесне» походження: з геометрією на сфері люди зіткнулися вперше в астрономії, при вивчення видимої «небесної сфери». Сферична геометрія виникла в I-II століттях нашої ери. Потім, з розвитком мореплавства та географії, сферичну геометрію стали застосовувати і до поверхні земної кулі.

Якщо основними поняттями плоскої геометрії є точка, пряма і рух площини, то в сферичній геометрії таку ж роль грають *точка* сфери, *велике коло* і *рух* сфери. Переріз сфери кожною площиною являє собою коло. Переріз сфери кожною площиною являє собою коло. Радіус ρ цього кола є катет прямокутного трикутника (рис.11.1), гіпотенуза якого – радіус r, а другий катет – перпендикуляр h, який опущений з центра сфери на площину. Тому в силу теорема Піфагора

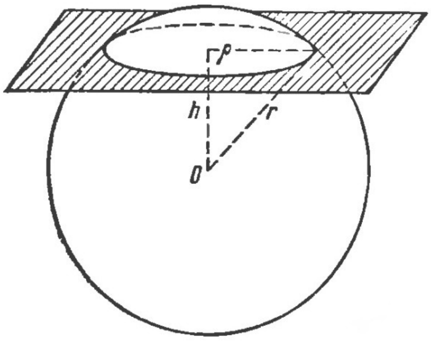


Рис. 11.1

$\rho=\sqrt{r^2-h^2}$.

Ця формула показує, що величина ρ приймає максимальне значення $\rho=r$ при $h=0$, тобто в тому випадку, коли площина проходить через центр сфери, тобто є діаметральною площиною.

В цьому випадку коло на сфері називається *великим колом.* При $H>0$ ми маємо $\rho<r$; коло на сфері називається в цьому випадку *малим колом.*

Рухом сфери називається таке перетворення сфери, при якому зберігається відстань між точками. Іншими словами, перетворення φ сфери є рухом, якщо для довільних точок A,B сфери відстань між точками $\varphi(A)$ і $\varphi(B)$ рівна відстані між точками A і B. Оскільки дві точки A і B тоді і тільки тоді є діаметрально протилежними, коли відстань між ними має найбільш можливе значення, яке дорівнює $2r$ (де r – радіус сфери), то з означення руху безпосередньо випливає, що при довільному русі сфери діаметрально протилежні точки сфери переходять в діаметрально протилежні точки.

Як приклад руху сфери відмітимо поворот сфери навколо деякого її діаметра CC' на кут α, при якому кожне коло сфери, яке має лінію CC' своєю віссю, повертається на кут α (рис.11.2). Іншим прикладом руху сфери є симетрія сфери відносно деякої її діаметральної площини (рис.11.3).

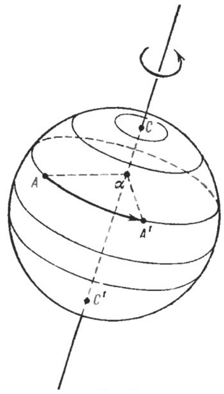
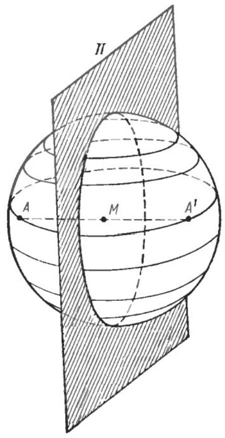



Рис. 11.2 *Рис*. 11.3

Предмет сферичної геометрії. Сферична геометрія вивчає ті властивості фігур на сфері, які зберігаються при довільних рухах сфери. Фігури на сфері, які можуть бути переведені одна в другу деяким рухом сфери, називаються рівними фігурами, геометричні властивості рівних фігур однакові.

Кожному великому колу відповідають дві діаметрально протилежні точки сфери, які відтинаються з неї діаметром, перпендикулярним до площини великого кола (рис.11.4). Ці дві точки називаються *полюсами* великого кола. Очевидно, що кожним двом діаметрально протилежним точкам A і B на сфері відповідає єдине велике коло (рис.11.4), для якого точки A і B є полюсами; це велике коло називається *полярою* пари діаметрально протилежних точок A,B. Кожна точка поляри називається *полярно спряженою* з кожним з її полюсів: інакше кажучи, точки P,Q сфери є полярно спряженими, якщо радіуси OP і OQ перпендикулярні (O – центр сфери).

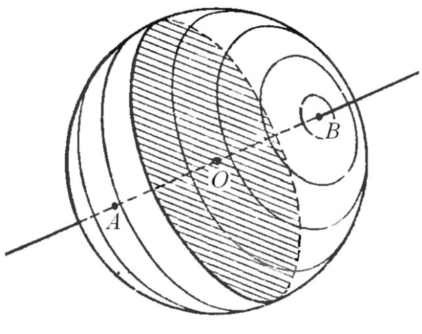


Рис. 11.4

Принцип двоїстості. Пара діаметрально протилежних точок є в сферичній геометрії самостійним геометричним об'єктом. Відмітимо одну чудову властивість цих пар точок: кожній теоремі сферичної геометрії відповідає інша теорема цієї геометрії, яка отримується з першої взаємною заміною слів: «пара діаметрально протилежних точок» і «велике коло», «лежати на» і «проходити через», «з'єднуються» і «перетинаються на» і т.д.. Ця властивість називається *принципом двоїстості,* а теореми, які отримуються одна з одної вказаною заміною, називаються *двоїстими одна одній теоремами.*

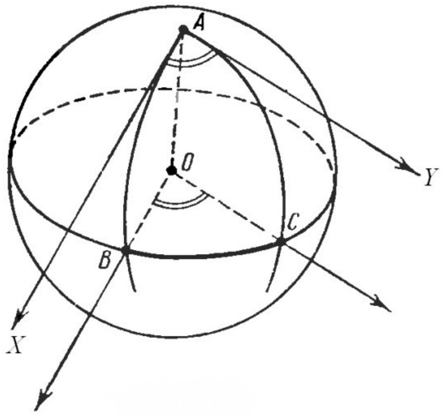


Рис. 11.5

Кути на сфері. Кутом між двома лініями в просторі, які перетинаються, називається кут між дотичними до цих ліній в точці їх перетину. Окремим випадком загального поняття кута між двома лініями є кут між двома великими колами на сфері. На рис. 11.5 зображений кут BAC між великими колами AB і AC на сфері та вимірювальний цей кут XAY між дотичними AX і AY до цих великих кіл.

Кут на сфері дорівнює довжині дуги великого кола між точками сторін кута, полярно спряженими з вершиною кута, поділеної на радіус сфери.

Сферичні трикутники.

Трикутники і двокутники на сфері. Три великих кола на сфері, які не перетинаються в одній точці, ділять сферу на вісім областей. Кожна з цих областей, яка обмежена дугами трьох великих кіл, називається *сферичним* *трикутником* (рис. 11.6). Дуги великих кіл, які обмежують сферичний трикутник, називаються його *сторонами,* кінці цих дуг називаються його *вершинами,* а кути, утворені сторонами сферичного трикутника в його вершинах, називаються *кутами* сферичного трикутника.

На відмінність від площини, де трикутник є многокутником з найменшим числом сторін, на сфері є многокутники з числом сторін менше трьох – *двокутники.* Двокутником є частина сфери, яка обмежена двома половинками великих кіл зі спільними кінцями; ці спільні кінці, які називаються вершинами двокутника, є діаметрально протилежними точками сфери. На рис. 11.7 зображений двокутник з вершинами A і A'.

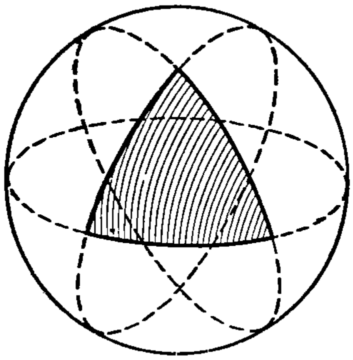


Рис. 11.6

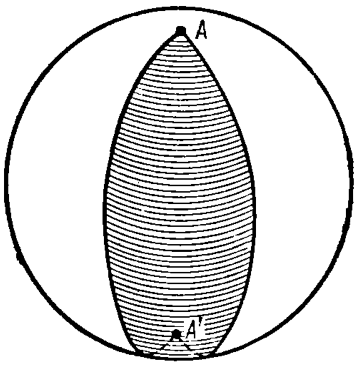


Рис. 11.7

Рівність сферичних трикутників. Два сферичних трикутника називаються *рівними,* якщо їх можна сумістити один з одним рухом сфери.

Є шість ознак рівності сферичних трикутників: *два сферичних трикутника рівні, якщо:*

I. Дві сторони одного сферичного трикутника рівні двом відповідним сторонам другого сферичного трикутника і рівні кути між цими сторонами.

II. Два кути одного сферичного трикутника рівні двом відповідним кутам другого сферичного трикутника і рівні сторони між цими кутами.

III. Всі три сторони одного сферичного трикутника рівні відповідним сторонам другого сферичного трикутника.

IV. Дві сторони одного сферичного трикутника рівні двом відповідним сторонам другого сферичного трикутника, кути, що лежать проти двох рівних сторін, рівні, а кути, що лежать проти двох інших рівних сторін, одночасно гострі або тупі.

V. Два кути одного сферичного трикутника рівні двом відповідним кутам другого сферичного трикутника, сторони, що лежать проти двох рівних кутів, рівні, а сторони, що лежать проти двох інших рівних кутів, одночасно менше або, більше $\frac{\pi}{2}r$.

VI. Всі три кути одного сферичного трикутника рівні відповідним кутам другого сферичного трикутника.

В сферичній геометрії мають місце й такі властивості сферичних трикутників і ліній:

1. В кожному сферичному трикутнику кожна сторона менше суми двох інших сторін і більше їх різниці.

2. В кожному сферичному трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, а проти більшої сторони лежить більший кут.

3. Дуга великого кола, яка менше півкола, коротше кожної лінії, що складається з дуг декількох великих кіл, які з'єднують ті ж точки сфери.

4. Дуга великого кола, яка менше півкола, коротше кожної неперервної лінії на сфері, що з'єднує ті ж точки сфери.

Деякі тригонометричні співвідношення в сферичному трикутнику. Нехай заданий сферичний трикутник ABC, сторони якого відповідно a, b, c і r – радіус сфери. Тоді має місце *сферична теорема косинусів:*

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A \quad (11.1)$$

Сферична теорема синусів, має вигляд такий:

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin C} \quad (11.2)$$

З формули (11.2) випливає, що при $r=1$ синуси сторін сферичного трикутника відносяться, як синуси протилежних кутів. В сферичній геометрії має місце так звана *формула п'яти елементів*

$$\sin\frac{a}{r}\cos B=\cos\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}-\sin\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A,(11.3)$$

яку словесно формулюють так: добуток синуса сторони сферичного трикутника на косинус прилеглого кута дорівнює різниці добутку косинуса сторони, що лежить проти цього кута, на синус третьої сторони і добутку синуса сторони, що лежить проти даного кута, на косинус третьої сторони і косинус сторони, що лежить проти даного кута.

В сферичній геометрії мають місце також *формули котангенсів:*

$$\sin\frac{c}{r}ctg\frac{b}{r}-\sin A\,ctg\,B=\cos\frac{c}{r}\cos A,(11.4)$$

$$\sin\frac{a}{r}ctg\frac{c}{r}-\sin B\,ctg\,C=\cos\frac{a}{r}\cos B,(11.5)$$

$$\sin\frac{b}{r}ctg\frac{a}{r}-\sin C\,ctg\,A=\cos\frac{b}{r}\cos C,(11.6)$$

$$\sin\frac{a}{r}ctg\frac{b}{r}-\sin C\,ctg\,B=\cos\frac{a}{r}\cos C,(11.7)$$

$$\sin\frac{b}{r}ctg\frac{c}{r}-\sin A\,ctg\,C=\cos\frac{b}{r}\cos A,(11.8)$$

$$\sin\frac{c}{r}ctg\frac{a}{r}-\sin B\,ctg\,A=\cos\frac{c}{r}\cos B.(11.9)$$

До теми «Неевклідова геометрія Рімана»

Між геометрією на сфері і геометрією на площині є одна істотна відмінність. Ми знаємо, що через кожні дві точки площини проходить єдина пряма лінія; іншими словами, жодні дві прямі не можуть перетнутися в двох точках. В протилежність цьому кожні два великих кола сфери перетинаються в двох (діаметрально протилежних) точках. Ця обставина різко відрізняє сферичну геометрію як від евклідової геометрії, так і від неевклідової геометрії Лобачевського. Для того щоб усунути її, ми домовимось називати «точкою» відразу пару діаметрально протилежних точок сфери. Отриманий геометричний образ – сферу, яка розуміється як множина пар діаметрально протилежних, точок, – ми і назвемо *неевклідовою площиною Рімана.*

Основна аксіома «через кожна дві точки можна провести пряму і притому тільки одну» евклідової геометрії зберігає силу і в геометрії

Рімана; але поряд з нею тут має місце також і аксіома «кожні дві прямі перетинаються в точці і притому тільки в одній». З цієї аксіоми випливає, що на неевклідовій площині Рімана виконується V постулат Евкліда. Однак на неевклідовій площині Рімана не виконуються аксіоми порядку евклідової площини, оскільки у випадку неевклідової площини Рімана кожну з трьох точок прямої можна вважати лежачою між двома іншими, подібно до того як це має місце для трьох точок евклідового кола.

З властивостей сферичних кіл випливає, що всі перпендикуляри до однієї прямої на неевклідовій площині Рімана перетинаються в полюсі цієї прямої. Далі, кожні дві прямі на площині Рімана мають спільний перпендикуляр, полюсом якого є точка перетину цих прямих. З цього випливає, що при $r=1$ кут між двома прямими a і b (рис. 12.1) дорівнює відстані між точками M і N їх перетину з їх спільним перпендикуляром c, а також дорівнює відстані між полюсами A і B цих прямих. Таким чином, прямі неевклідової площини Рімана, якщо вважати кути між ними відстанями, утворюють модель цієї ж площини.

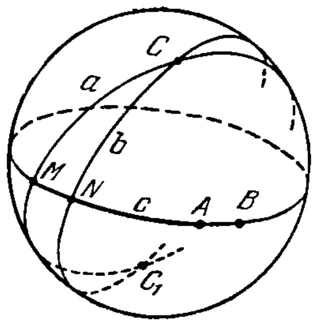


Рис. 12.1

Розглянемо своєрідне «перетворення» неевклідової площини Рімана, яке співставляє кожній прямій a цієї площини певну точку A – полюс прямої a, в кожній точці A – пряму a, полюсом якої є точка A (ця пряма називається *полярою* точки A). Відповідне перетворення, яке замінює прямі точками, а точки прямими, називається *полярним перетворенням.*

Існування полярного перетворення з такими чудовими властивостями забезпечує виконання в неевклідовій геометрії Рімана принципу двоїстості, який полягає у наступному: якщо замінити в будь-якому твердженні неевклідової геометрії Рімана слова «точка», «лежить на», «відстань» відповідно словами «пряма», «проходить через», «кут» і навпаки, то ми прийдемо до нового твердження, яке також є правильним.

РОЗДІЛ 2
НАВЧАЛЬНИЙ МАТЕРІАЛ ДЛЯ РОЗРОБКИ ПЛАНІВ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ «ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ»

Практичне заняття № 1 з теми «Задачі на побудову»

Аудиторні завдання:

1. Побудувати трикутник за медіаною m_a висотою h_a і бісектрисою b_a, що виходять з вершини кута A.

Аналіз. Припустимо, що шуканий трикутник ABC побудовано (рис.1.1). Проведемо $AM=h_a, AE=b_a$ і $AD=m_a$.

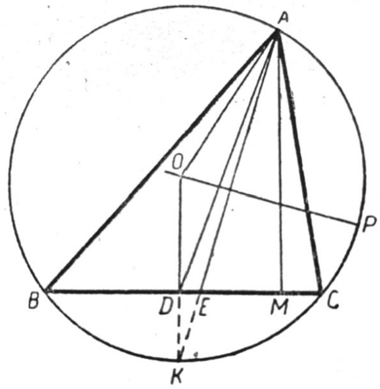


Рис. 1.1

Бачимо, що можна побудувати прямокутний трикутник ADM за гіпотенузою $AD=m_a$ і катетом $AM=h_a$. Отже, задача зводиться до визначення вершин B,C. Опишемо навколо трикутника ABC коло. Його центр O знаходиться на $OD\perp BC$. При продовженні OD дуга BC поділиться навпіл. Бісектриса ж AE при продовженні пройде через точку K. З іншого боку, якщо центр O сполучити з вершиною A, то одержимо рівнобедрений трикутник AOK ($AO=OK$, як радіуси кола). Отже, центр кола знаходиться на перетині перпендикуляра OP, проведеного через середину AK, і $OD\perp DC$. Якщо знайдемо центр O кола і радіусом OA проведемо коло, то вершини B і C будуть на перетині DM з колом.

Побудова.

1. Будуємо прямокутний трикутник ADM за гіпотенузою $AD=m_a$ і катетом $AM=h_a$.

2. Проводимо дугу з центром у точці A і радіусом b_a. Знаходимо точку E при перетині дуги з DM.

3. Проводимо $DO\perp DM$ і продовжуємо AE до перетину з продовженням OD у точці K.

4. Через середину AK проводимо перпендикуляр OP. Точка O перетину перпендикуляра OP з OD є центром кола.

5. Проводимо коло з центром у точці O і радіусом OA.

6. Продовжуємо DM до перетину з колом у точках B і C і сполучаємо точки B і C з точкою A. Трикутник ABC – шуканий.

Доведення. $AM\perp BC, AM=h_a, AD=m_a$ (за побудовою), $AE=b_a$ (за побудовою). Точка D є серединою BC, бо D є основою перпендикуляра, опущеного з центра O кола на BC. $\angle BAE=\angle EAC$, бо точка K є серединою дуги.

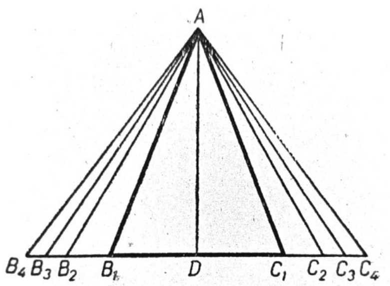


Рис. 1.2

Дослідження. Відомо, що в будь-якому трикутнику бісектриса кута або розміщена між медіаною і висотою, або суміщається з ними (у рівнобедреному трикутнику). Необхідними умовами розв'язування задачі є: $h_a\le b_a\le m_a$. Отже, при $h_a>b_a, h_a>m_a$ або $b_a>m_a$ задача не має розв'язків. Якщо $h_a<b_a<m_a$, задача визначена і має лише один розв'язок, бо точка O є точкою перетину двох прямих, а DM при продовженні перетнеться з колом лише в точках B і C. Випадки $h_a<b_a=m_a, h_a=b_a<m_a$ неможливі. Якщо $h_a=b_a=m_a$, задача стає невизначеною і має безліч розв'язків, тому що безліч рівнобедрених трикутників мають одну і ту саму висоту (рис.1.2). Будь-який інший спосіб

не може дати іншого розв’язку, бо можна довести рівність трикутників за медіаною, бісектрисою і висотою.

2. Побудувати трикутник за двома кутами α і β та периметром P.

Практичне заняття № 2 з теми «Застосування геометричних місць точок при розв’язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання:

1. Побудувати трикутник за основою a, висотою h_a і кутом A.

Аналіз. Відкинемо величину висоти. Тоді задача перетвориться в таку: «Побудувати трикутник за основою a і кутом A». Легко бачити, що ця задача є невизначеною: всі точки, з яких відрізок a видно під кутом A, утворюють дуги сегментів, що вміщують кут A і побудовані на відрізку a.

Тепер відкинемо величину кута. Тоді задача перетвориться на таку: «Побудувати трикутник за основою a і висотою h_a». Бачимо, що і ця задача є невизначеною: існує безліч трикутників, які мають спільну основу a і висоту h_a, і вершини їх утворюють ГМТ, рівновіддалених від a на віддаль h_a. Отже вершини шуканих трикутників знаходяться на перетині знайдених ГМТ.

Побудова.

1. На відрізку a будуємо сегменти, що вміщують кут A (рис. 2.1)

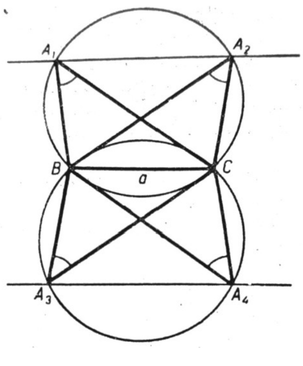
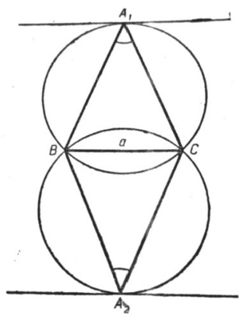


Рис. 2.1

2. На віддалі h_a від відрізка a проводимо прямі, паралельні a.
3. З’єднуємо точки перетину прямих з дугами з кінцями відрізка a.



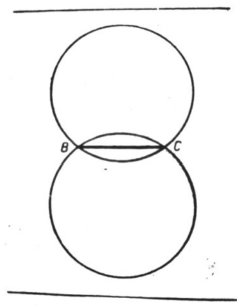


Рис. 2.2 *Рис*. 2.3

Доведення. $BC=a$; кути A_1, A_2, A_3, A_4 побудованих трикутників дорівнюють даному кутові A, бо їх вершини знаходяться на сегменті, що вміщує кут A. Висоти трикутників дорівнюють h_a, тому що A_1, A_2, A_3, A_4 належать тим прямим, які знаходяться на відстані h_a від a.

Дослідження. Задача має 4 розв'язки, якщо прямі та дуги сегментів перетинаються в чотирьох точках (рис.2.1); два розв'язки, якщо прямі дотикаються до кіл (рис. 2.2), і не має жодного розв'язку, якщо прямі і сегменти не мають спільних точок (рис. 2.3).

2. Дано точки A і B та пряму KM (рис. 2.4). На цій прямій треба знайти точку, рівновіддалену від точок A і B.

Практичне заняття № 3 з теми «Застосування паралельного перенесення при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання :

1. Побудувати паралелограм $ABCD$, якщо відомі його діагоналі AC і BD та кут CAD.

Аналіз. Припустимо, що шуканий паралелограм побудовано (рис.3.1). Виконуємо паралельне перенесення діагоналі BD на вектор $\acute{B}C$. Очевидно, трикутник ACM можна побудувати за сторонами AC, CM і кутом CAM.

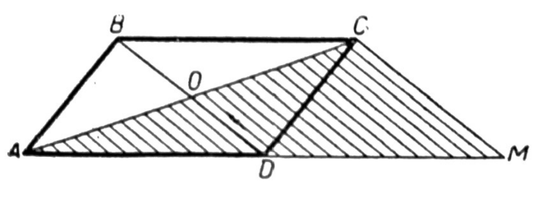


Рис. 3.1

Побудова.

1. Будуємо ΔACM за сторонами AC, CM і кутом CAM.

2. Ділимо AM точкою D навпіл.

3. Знаходимо точку B як точку перетину двох кіл $\omega_1(C, AD)$ і $\omega_2(D, CM)$.

2. Побудувати чотирикутник за сторонами a, b, c і кутами α і β, прилеглими до четвертої сторони чотирикутника.

Аналіз. Нехай $ABCD$ – шуканий чотирикутник (рис. 3.2). Перенесемо сторону CD на вектор $\acute{CB}$. Тоді, очевидно, ламану ABK можна побудувати так: побудувати кут α, відкласти на одній стороні кута $AB=a$ і при точці B побудувати кут, що дорівнює $180°-(\alpha+\beta)$. Для знаходження точки K достатньо відкласти $BK=CD$. Точка D знаходиться як точка перетину AM і кола радіуса c з центром у точці K.

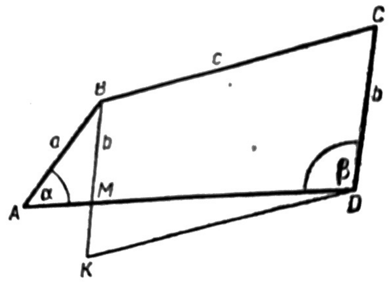


Рис. 3.2

Побудова.

1) Будуємо кут $BAM=\alpha$.

2) Відкладаємо $AB=a$.

3) З точки B проводимо пряму BM так, що $\angle ABM=180°-(\alpha+\beta)$.

4) Відкладаємо $BK=b$.

5) Проводимо з точки K коло радіуса c до перетину з продовженням AM. Дістанемо точку D.

6) Знаходимо точку C як точку перетину двох кіл: кола з центром у точці D і радіусом b; кола з центром у точці B і радіусом c.

Практичне заняття № 4 з теми «Застосування осьової симетрії при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання:

1. У трикутнику через вершину A і довільну точку D основи проведемо пряму AD. На цій прямій знайти таку точку M, з якої відрізки BD і CD було б видно під однаковими кутами.

Аналіз. Припустимо, що задача розв'язана і M – шукана точка (рис.4.1). Тоді $\angle AMB = \angle AMC$, тобто AM є бісектриса кута CMB. Отже, перпендикуляр, опущений з C на AM перетинає BM у точці C_1, симетричній точці C.

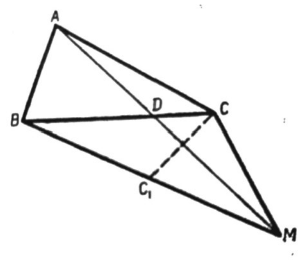


Рис. 4.1

Побудова.

1. Проводимо AD і будуємо точку C_1, симетричну C відносно AM.

2. Проводимо BC_1 та продовжуємо її до перетину з продовженням AM у точці M.

2. На основі трикутника ABC побудувати трикутник AB_1C, рівновеликий трикутнику ABC, але з найменшим периметром.

3. Побудувати трикутник, знаючи положення його бісектрис та точки M на стороні AB.

Практичне заняття № 5 з теми «Застосування повороту при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання:

1. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник так, щоб вершина його прямого кута лежала в даній точці, а інші дві вершини – на даних колах з центрами O і O_2.

Аналіз. Припустимо, що задача розв'язана і шуканий трикутник ABC побудовано (рис. 5.1). Якщо вибрати за центр обертання точку A, то при обертанні на $90°$ точка B суміститься з точкою C. Отже, точку C можна знайти як точку перетину даного кола з центром O_2 і одержаного кола з центром O_1.

Побудова.

1. Обертаємо дане коло з центром у точці O навколо точки A на $90°$ і знаходимо точку C як точку перетину одержаного кола і даного кола з центром O.

2. Знаходимо точку B шляхом описування з точки A кола радіусом AC.

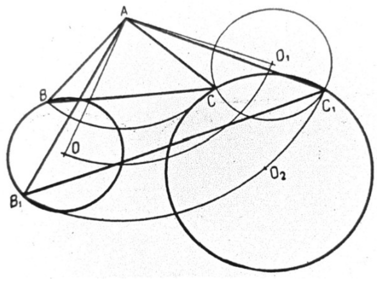


Рис. 5.1

Дослідження. Задача має два розв'язки, якщо побудоване коло перетинається з даними у двох точках (рис.5.1), один розв'язок, якщо ці кола дотикаються (рис.5.2), і не має жодного розв'язку, якщо кола не мають спільних точок (рис.5.3).

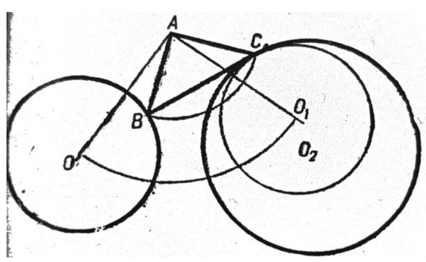


Рис. 5.2

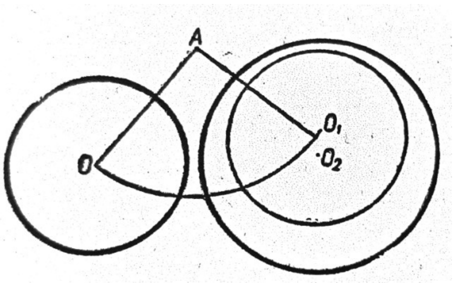


Рис. 5.3

2. Побудувати квадрат, якщо відома точка перетину його діагоналей і точки A і B на протилежних сторонах квадрата.

Практичне заняття № 6 з теми «Застосування гомотетії при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання:

1. Побудувати трикутник за двома його кутами A і C і висотою, опущеною з вершини третього кута.

Аналіз. Шуканий трикутник повинен задовольняти такі умови: 1) мати кути, що дорівнюють A і C; 2) мати висоту, що дорівнює даному відрізку a.

Трикутник, що задовольняє першу умову, легко побудувати, причому таких трикутників може бути безліч. Нехай ми побудували з них трикутник A_1BC_1 (рис. 6.1). Потрібний нам трикутник слід шукати серед трикутників, подібних побудованому. Трикутник A_1BC_1 відрізняється від шуканого лінійними елементами, зокрема висотою B. Зробимо тепер подібне перетворення побудованого трикутника з центром гомотетії B і коефіцієнтом $k=\frac{a}{BK_1}$, де a – даний відрізок (висота). Побудуємо точку K, гомотетичну точці K_1; проведемо через точку K пряму AC, парлельну A_1C_1. Трикутник ABC – шуканий.

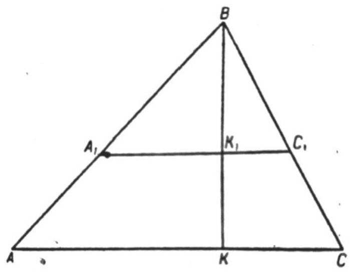


Рис. 6.1

Побудова.

1. Побудуємо довільний трикутник A_1BC_1, подібний до шуканого.
2. Будуємо висоту BK_1 цього трикутника.
3. На промені BK_1 знаходимо таку точку K, що $BK=a$.
4. Через точку K проводимо пряму AC, паралельну A_1C_1.

Доведення. Побудований трикутник є шуканим, бо він задовольняє обидві умови: 1) має кути, що дорівнюють даним; 2) має висоту, що дорівнює даному відрізку a.

Дослідження. Оскільки всі етапи побудови виконані однозначно, маємо один розв’язок. Інший спосіб приводить до цього ж розв’язку.

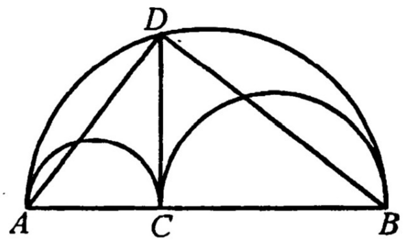
2. У даний гострокутний трикутник вписати квадрат так, щоб його дві вершини лежали на основі, а дві – на бічних сторонах.

3. Побудувати трикутник за двома кутами A і B та сумою протилежних до даних кутів сторін.

Практичне заняття № 8 з теми «Планіметричні задачі на доведення»

Аудиторні завдання:

1. Довести, що якщо діаметр півкруга поділити на дві довільні частини і на кожній з них побудувати як на діаметрі півколо (всередині заданого півкруга), то площа, розташована між трьома півколами, дорівнює площі круга, діаметр якого дорівнює довжині перпендикуляра до діаметра півкруга, який проведено в точці поділу до перетину з колом.



Доведення.

Нехай R – радіус заданого півкруга, а r – радіус одного з побудованих півкругів. Тоді площа заданої фігури дорівнює

$0,5\left(\pi R^2 - \pi r^2 - \pi (R-r)^2\right) = \pi r(R-r)$.

Так як $\angle ADB = 90°$, то

$$CD^2 = AC * CB = 2r * 2(R-r) = 4r(R-r),$$

звідки $\frac{\pi CD^2}{4} = \pi r(R-r)$, що і треба було довести.

2. Через кінці дуги кола, яка дорівнює $120°$, проведено дотичні, і в фігуру, обмежену цими дотичними і заданою дугою, вписане коло. Довести, що довжина вписаного кола дорівнює довжині заданої дуги.

3. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї з його сторін дорівнює відношенню висоти, проведеної до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.

4. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на відрізки довжиною m і n. Довести, що площа трикутника $S=mn$. Знайти площу прямокутника, вписаного в заданий трикутник так, що одна його вершина співпадає з вершиною прямого кута, а протилежна вершина – з точкою дотику кола і гіпотенузи.

Практичне заняття № 9 з теми «Стереометричні задачі на доведення»

Аудиторні завдання:

1. Дано декілька прямих, причому будь-які дві з них перетинаються. Довести, що або всі вони лежать в одній площині, або всі вони проходять через одну точку.

Доведення. Припустимо, що три задані прямі a, b і c не лежать на одній площині. Тоді пряма c може перетинати прямі a і b тільки в точці їх перетину. Якщо б пряма d перетинала прямі a, b і c в точках, відмінних від їх спільної точки, то прямі a, b і c лежали б в одній площині.

2. Нехай пряма l перетинає площину Π в точці O. Доведіть, що кут між прямою l і площиною Π – найменший з кутів між прямою l і прямими, розташованими в площині Π.

3. Доведіть, що пряма l утворює рівні кути з двома прямими, що перетинаються тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна одній з двох бісектрис кутів між цими прямими.

4. Дано три прямі a, b і c, які попарно перетинаються і не паралельні одній площині. Доведіть, що існує єдиний відрізок, паралельний прямій c, кінці якого лежать на прямих a і b.

5. Доведіть, що сума квадратів довжин проекцій ребер куба на будь-яку площину дорівнює $8a^2$, де a – довжина ребра куба.

Практичне заняття № 10 з теми «Застосування тригонометрії при розв'язуванні геометричних задач»

Аудиторні завдання :

1. Сума двох різних висот рівнобедреного трикутника дорівнює l, кут при вершині дорівнює α. Знайдіть бічну сторону.

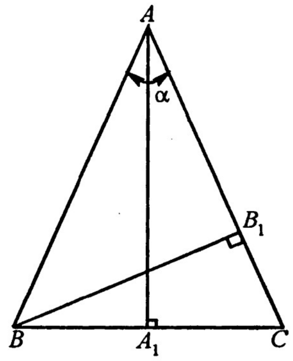


Рис. 10.1

Розв'язання. За умовою $AB=AC, AA_1 \perp BC, BB_1 \perp AC, \angle BAC=\alpha, AA_1+BB_1=l$(рис.10.1). Нехай $BC=a$. З ΔAA_1C знаходимо

$$AA_1=\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\alpha}{2},\ AC=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а з ΔBB_1C отримаємо $BB_1=a\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}¿)=a\cos\frac{\alpha}{2}¿$. Використовуючи умову,

маємо $\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\alpha}{2}+a\cos\frac{\alpha}{2}=l$,або $\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\alpha}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)=l$,тобто $a=\frac{2l\,tg\frac{\alpha}{2}}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Отже,

знайдемо

$$AC=\frac{l\,tg\frac{\alpha}{2}}{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}=¿$$

$$¿\frac{l}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}¿)+\sin\alpha=\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}¿}$$

2. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, кут при вершині дорівнює α. Знайти довжину бісектриси, яка проведена до бічної сторони.

3. Кут при основі гострокутного рівнобедреного трикутника $ABC(AB=BC)$ дорівнює α. У якому відношенні, рахуючи від вершини A, висота BD ділить висоту AE?

4. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з бічним ребром кут α. Знайти об’єм паралелепіпеда, якщо периметр його основи дорівнює P.

5. Основа призми – рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, протилежної даному куту, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об’єм призми.

Практичне заняття № 11 з теми «Метод координат при розв’язуванні геометричних задач»

Аудиторні завдання:

1. Дано трикутник ABC; BD – медіана, $\angle DBC = 90°, BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$. Знайти $\angle ABD$.

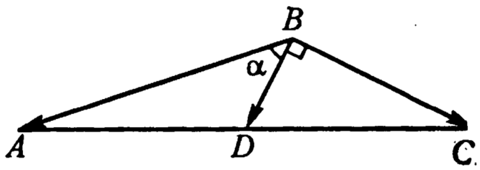


Рис. 11.1

Розв’язання. За умовою,

$$\angle DBC = 90°, BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB, AD = DC$$

(рис.11.1); потрібно знайти $\angle ABD = \alpha$. Для знаходження кута α будемо використовувати формулу

$\cos\alpha = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BD}}{|\vec{BA}||\vec{BD}|}$.Так як BD – медіанаΔABC, то $BD = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC})$, звідси $\vec{BA} = 2\vec{BD} - \vec{BC}$. Тобто,

$$\cos\alpha = \frac{(2\vec{BD} - \vec{BC})\vec{BD}}{|\vec{BA}||\vec{BD}|} = \frac{2BD^2 - \vec{BC} \cdot \vec{BD}}{|\vec{BA}||\vec{BD}|}. (11.1)$$

Але $\vec{BC} \perp \vec{BD}$, тобто $\vec{BC} \cdot \vec{BD} = 0$, а з рівності $BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$ випливає, що

$AB = \frac{4}{\sqrt{3}} BD$. Тоді рівність (11.1) матиме вигляд

$$\cos\alpha = \frac{2BD^2}{\frac{4}{\sqrt{3}} BD^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \textit{звідки}\ \alpha = 30°$$

Відповідь: $30°$.

2. Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершини основи $ABCD$ розташовані за годинниковою стрілкою); K – середина ребра AA_1; H – середина ребра AD; M – центр грані CC_1D_1D. Довести, що пряма KM перпендикулярна прямій B_1H.

3. У паралелограмі $ABCD$ – дано: $M \in BC$ і $BM:MC=1:2; N \in DC, DN:NC=1:2; \vec{AM}=\vec{a}; \vec{AN}=\vec{b}$. Виразити вектори $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{MN}$ і $\vec{BD}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

4. Дано два відрізки AB і CD. Довести, що якщо $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$, то $AB \perp CD$. Чи справедливе зворотне твердження?

Практичне заняття № 12 з теми «Векторний метод при розв'язуванні геометричних задач»

Аудиторні завдання:

1. Знайти одиничний вектор, колінеарний вектору, направленому по бісектрисі кута BAC трикутника ABC, якщо задані його вершини: $A(1;1;1), B(3;0;1), C(0;3;1)$.

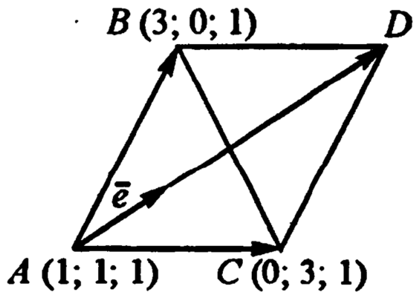


Рис. 12.1

Розв'язання. Знайдемо координати і модулі векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$; маємо $\vec{AB}(2;-1;0), \vec{AC}(-1;2;0)$.

$$|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5}, |\vec{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$$

Так як $|\vec{AB}|=|\vec{AC}|$, то $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}$ є діагоналлю ромба $ABCD$ (рис. 12.1), і відповідно – бісектрисою кута BAC. Маємо

$$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}=(2;-1;0)+(-1;2;0)=(1;1;0)$$

і $|\vec{AD}|=\sqrt{2}$. Нехай $\vec{e}$ – одиничний вектор, співнапрямний з вектором $\vec{AD}$, тобто $\vec{e}=\frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|}$. Тоді, використовуючи формулу $\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ отримаємо $\vec{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

2. Дано вектор $\vec{a}(1;-2;5)$. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який лежить в площині xOy і перпендикулярний вектору $\vec{a}$, якщо $|\vec{b}|=2\sqrt{5}$.

3. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, який утворюють прямі $y=0,2x-0,4$; $y=x+2$; $y=8-x$.

4. У трапеції $ABCD$ задано: вершина $A(3;0)$, середина основи AB – точка $E(6;-1)$, середина основи CD – точка $F(7;2)$. Бічна сторона BC паралельна Oy. Довести, що трапеція рівнобедрена, і знайти кут при основі.

ВИСНОВКИ

В ході виконання дослідження було здійснено аналіз навчально-методичної літератури з «Основ геометрії» та складено на основі його списків літературних джерел (основної, додаткової та інтернет-ресурсів), які можуть бути корисними при вивченні тем дисциплін.

Також під час виконання роботи було розроблено плани-конспекти лекційних та практичних занять з курсу, які містять стислі теоретичні відомості з навчального матеріалу, а також приклади розв'язування завдань з тем курсу, що можуть бути запропоновані під час проведення практичних занять або для забезпечення дистанційного навчання студентів. Окрім наведених прикладів для організації аудиторної роботи студентів, розроблено системи вправ з відповідних тем курсу для організації самостійної роботи студентів в аудиторії та в позааудиторний час.

В роботі наведено розробку методичного матеріалу для організації самостійної роботи студентів під час проведення практичних занять з основ геометрії, зокрема, самостійних робіт, а також розробку завдань комплексної контрольної роботи для проведення контрольних заходів з тем курсу та питань для проведення заліку або екзамену.

Структурні компоненти роботи повністю відповідають структурним компонентам навчально-методичного комплексу дисципліни, нормативні вимоги до якого визначені для навчально-методичних комплексів з дисциплін кафедр Херсонського державного університету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна література

1. Александров А. Д. Геометрия / А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев. – М: Наука, 1990. – 672 с.

2. Александров А. Д. Основания геометрии / А. Д. Александров. – М: Наука, 1987. – 288 с.

3. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. 2 / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – Москва: Просвещение, 1987. – 352 с.

4. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. 2 / Л. С. Атанасян, Г. В. Гуревич. – М: Просвещение, 1973. – 343 с.

5. Базылев В. Г. Геометрия. Ч.2 / В. Г. Базылев, К. И. Дунычев. – М: Просвещение, 1975. – 368 с.

6. Гильберт Д. Основания геометрии / Д. Гильберт. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 492 с.

7. Егерев В. К. Сборник задач по математике с решениями, 8-11 кл.; Под ред. М.И. Сканави / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемський и др. – М: ООО "Издательство Оникс", 2012. – 624 с.

8. Игошин В. И. Основания геометрии / В. И. Игошин. – Саратов: Научная книга, 2004. – 84 с.

9. Погорелов А. В. Геометрия / А. В. Погорелов. – М: Наука, 1983. – 288 с.

10. Прасолов В. В. Задачи по стереометрии: Учебное пособие / В. В. Прасолов. – М: МЦНМО, 2010. – 352 с.

Додаткова література

1. Атанасян Л. С. Геометрия. 10-11 классы / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов. – М: Просвещение, 2008. – 255 с.

2. Атанасян Л. С. Сборник задач по геометрии. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Л. С. Атанасян, В. А. Атанасян. – М: Просвещение, 1973. – 256 с.

3. Бахвалов С. В. Основания геометрии (главы высшей геометрии). Ч. I. Учебное пособие для вузов. / С. В. Бахвалов, В. П. Иваницкая. – М: Высшая школа, 1972. – 280 с.

4. Дадаян, А. А. Геометрические построения на плоскости и в пространстве. Задачи и решения. Учебное пособие / А.А. Дадаян. - М.: Форум, Инфра-М, 2014. - 464 с.

5. Ефимов М. В. Высшая геометрия: Учеб. пособие / М. В. Ефимов. – М: Наука, 1978. – 584 с.

6. Кирилюк О. А. Основи геометрії: Конспект лекцій / О. А. Кирилюк. – Ужгород, 2007. – 89 с.

7. Кузютин В. Ф. Геометрия: учебник для вузов / В. Ф. Кузютин, Н. А. Зенкевич, В. В. Еремеев. – Лань, 2003. – 415 с.

8. Кутузов Б. В. Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии / Б. В. Кутузов. – М: УЧПЕДГИЗ, 1950. – 469 с.

9. Постников М. М. Аналитическая геометрия / М. М. Постников. – М: Наука, 1979. – 126 с.

10. Шарипов Р.А. Основания геометрии для студентов и школьников: учебное пособие / Р.А. Шарипов. – Уфа: Издание Башкирского ун-та., 1998. – 220 с.

Електронні ресурси

1. Геометрія Лобачевського [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://znaimo.com.ua/Геометрія_Лобачевського.

2. Неевклідова геометрія [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://naurok.com.ua/neevklidova-geometriya-urok-96634.html.

3. Основні поняття геометрії [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://moyaosvita.com.ua/geometriya/osnovni-ponyattya-geometrii/.

4. Практикум з основ геометрії [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://dspace.udpu.edu.ua/bitstream/6789/5568/1/Основи%20геометрії.pdf

5. Проблеми набуття компетентності щодо опанування теорією при вивченні аксіом геометрії та їхніх безпосередніх наслідків [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.kievoi.ippo.kubg.edu.ua/kievoi/lectures/axioms.html.

ДОДАТКИ

Додаток А
Плани практичних занять з «Основ геометрії»

Практичне заняття № 1 з теми
«Задачі на побудову»

Аудиторні завдання :

3. Побудувати трикутник за медіаною m_a висотою h_a і бісектрисою b_a, що виходять з вершини кута A.

Аналіз. Припустимо, що шуканий трикутник ABC побудовано (рис.1.1). Проведемо $AM=h_a, AE=b_a$ і $AD=m_a$.

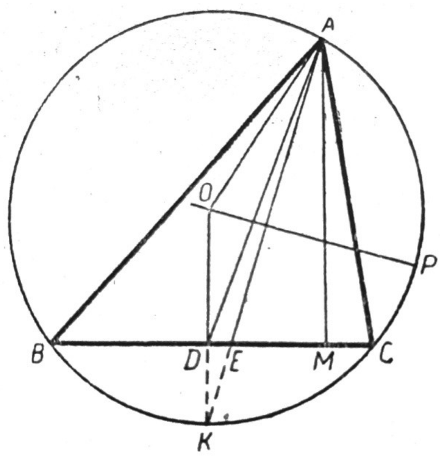


Рис. 1.1

Бачимо, що можна побудувати прямокутний трикутник ADM за гіпотенузою $AD=m_a$ і катетом $AM=h_a$. Отже, задача зводиться до визначення вершин B,C. Опишемо навколо трикутника ABC коло. Його центр O знаходиться на $OD\perp BC$. При продовженні OD дуга BC поділиться навпіл. Бісектриса ж AE при продовженні пройде через точку K. З іншого боку, якщо центр O сполучити з вершиною A, то одержимо рівнобедрений трикутник AOK ($AO=OK$, як радіуси кола). Отже, центр кола знаходиться на перетині перпендикуляра OP, проведеного через середину AK, і $OD\perp DC$.

Якщо знайдемо центр O кола і радіусом OA проведемо коло, то вершини B і C будуть на перетині DM з колом.

Побудова.

7. Будуємо прямокутний трикутник ADM за гіпотенузою $AD=m_a$ і катетом $AM=h_a$.

8. Проводимо дугу з центром у точці A і радіусом b_a. Знаходимо точку E при перетині дуги з DM.

9. Проводимо $DO \perp DM$ і продовжуємо AE до перетину з продовженням OD у точці K.

10. Через середину AK проводимо перпендикуляр OP. Точка O перетину перпендикуляра OP з OD є центром кола.

11. Проводимо коло з центром у точці O і радіусом OA.

12. Продовжуємо DM до перетину з колом у точках B і C і сполучаємо точки B і C з точкою A. Трикутник ABC – шуканий.

Доведення. $AM \perp BC, AM=h_a, AD=m_a$ (за побудовою), $AE=b_a$ (за побудовою). Точка D є серединою BC, бо D є основою перпендикуляра, опущеного з центра O кола на BC. $\angle BAE=\angle EAC$, бо точка K є серединою дуги.

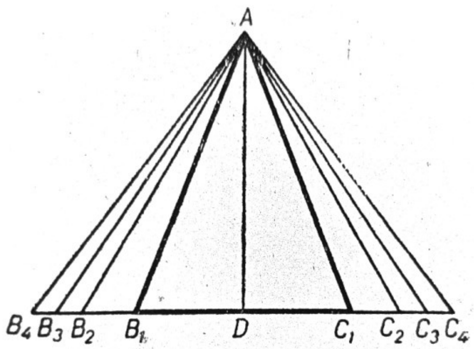


Рис. 1.2

Дослідження. Відомо, що в будь-якому трикутнику бісектриса кута або розміщена між медіаною і висотою, або суміщається з ними (у рівнобедреному трикутнику). Необхідними умовами розв'язування задачі є: $h_a \le b_a \le m_a$. Отже, при $h_a > b_a, h_a > m_a$ або $b_a > m_a$ задача не має розв'язків. Якщо $h_a < b_a < m_a$, задача визначена і має лише один розв'язок, бо точка O є точкою перетину двох прямих, а DM при продовженні перетнеться з колом лише в точках B і C. Випадки $h_a < b_a = m_a$, $h_a = b_a < m_a$ неможливі. Якщо $h_a = b_a = m_a$, задача стає невизначеною і має безліч розв'язків, тому що безліч рівнобедрених трикутників мають одну і ту саму висоту (рис.1.2). Будь-який інший спосіб не може дати іншого розв'язку, бо можна довести рівність трикутників за медіаною, бісектрисою і висотою.

4. Побудувати трикутник за двома кутами α і β та периметром P.

Аналіз. Припустимо, що ΔACB є шуканий (рис.1.3). У ньому відомо $\angle A = \alpha$ і $\angle B = \beta$. У задачі говориться про периметр трикутника. Побудуємо відрізок, що дорівнює периметрові трикутника, а саме: продовжимо AB і відкладемо $AE = AC$ і $BK = BC$. Сполучивши точки E і K з точкою C, одержимо ΔECK, у якому відома основа $EK = P$ і кути при основі: $\angle E = \frac{\alpha}{2}$ і $\angle K = \frac{\beta}{2}$. Отже, ΔECK можна побудувати. У зв'язку з тим, що ΔECA і ΔKCB рівнобедрені, для знаходження вершин A і B шуканого трикутника необхідно провести перпендикуляри AM через середину CB і DB через середину CK.

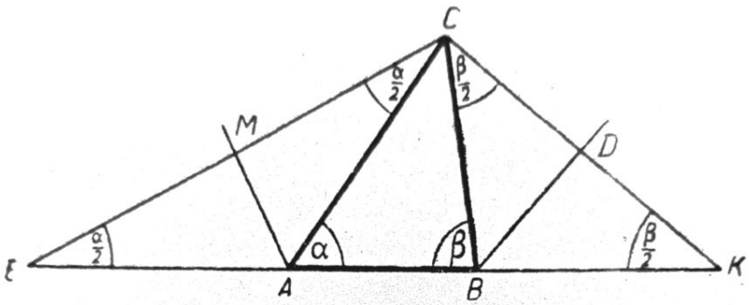


Рис. 1.3

Побудова.

1. Будуємо трикутник KCE за стороною $EK = P$ і кутами: $CEK = \frac{\alpha}{2}$ і $CKE = \frac{\beta}{2}$.

2. Через середини CE і CK проводимо перпендикуляри до перетину з EK у точках A і B.

3. Сполучаємо точки A, C, B. Трикутник ACB – шуканий.

Доведення. Периметр трикутника ACB дорівнює P. Справді, $AC+AB+BC=EA+AB+BK=EK=P$; $\angle CBA=2,\ \angle CKB=\beta$.

Дослідження. Задача має розв’язок, причому лише один, якщо можна побудувати ΔECK, а це можливо, коли $\alpha+\beta<2d$.

Для самостійного розв’язання:

1. Побудувати трикутник за сторонами a і b та кутом A, що лежить проти однієї з цих сторін.

2. Побудувати трикутник за основою a, кутом B при основі та різницею двох інших сторін. Розглянути два випадки: а) коли B – більший кут при основі; б) коли B – менший кут при основі.

3. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та різницею гострих кутів.

4. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею гострих кутів.

5. Побудувати трикутник за кутом A і висотами h_b і h_c, опущеними на сторони цього кута.

6. Побудувати трикутник за висотою h_a, опущеною на основу, периметром P та кутом при основі.

7. У даному трикутнику провести пряму, паралельну основі, так, щоб її відрізок дорівнював сумі відрізків бічних сторін від основи.

8. Побудувати трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.

9. Побудувати трикутник за основою a, висотоюh_a h_a та медіаною m_c, проведеною до бічної сторони.

10. До двох кіл провести спільну дотичну: а) зовнішню; б) внутрішню.

Практичне заняття № 2 з теми

«Застосування геометричних місць точок при розв’язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання:

3. Побудувати трикутник за основою a, висотою h_a і кутом A.

Аналіз. Відкинемо величину висоти. Тоді задача перетвориться в таку: «Побудувати трикутник за основою a і кутом A». Легко бачити, що ця задача є невизначеною: всі точки, з яких відрізок a видно під кутом A, утворюють дуги сегментів, що вміщують кут A і побудовані на відрізку a.

Тепер відкинемо величину кута. Тоді задача перетвориться на таку: «Побудувати трикутник за основою a і висотою h_a». Бачимо, що і ця задача є невизначеною: існує безліч трикутників, які мають спільну основу a і висоту h_a, і вершини їх утворюють ГМТ, рівновіддалених від a на віддаль h_a.

Отже вершини шуканих трикутників знаходяться на перетині знайдених ГМТ.

Побудова.

4. На відрізку a будуємо сегменти, що вміщують кут A (рис. 2.1)

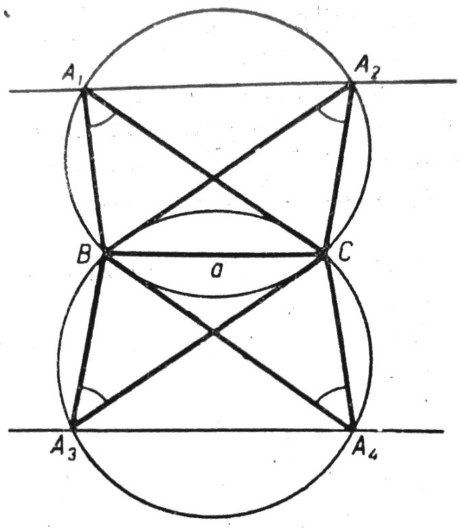


Рис. 2.1

5. На віддалі h_a від відрізка a проводимо прямі, паралельні a.
6. З’єднуємо точки перетину прямих з дугами з кінцями відрізка a.

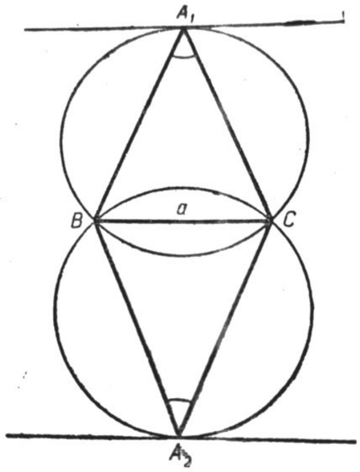


Рис. 2.2

Доведення. $BC=a$; кути A_1, A_2, A_3, A_4 побудованих трикутників дорівнюють даному кутові A, бо їх вершини знаходяться на сегменті, що вміщує кут A. Висоти трикутників дорівнюють h_a, тому що A_1, A_2, A_3, A_4 належать тим прямим, які знаходяться на відстані h_a від a.

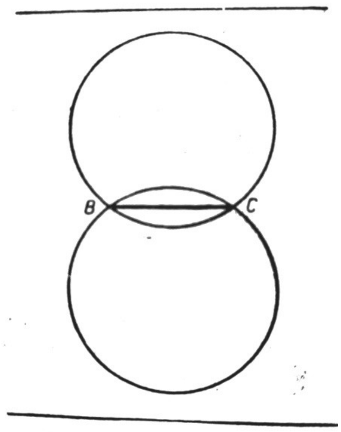


Рис. 2.3

Дослідження. Задача має 4 розв'язки, якщо прямі та дуги сегментів перетинаються в чотирьох точках (рис.2.1); два розв'язки, якщо прямі дотикаються до кіл (рис. 2.2), і не має жодного розв'язку, якщо прямі і сегменти не мають спільних точок (рис. 2.3).

4. Дано точки A і B та пряму KM (рис. 2.4). На цій прямій треба знайти точку, рівновіддалену від точок A і B.

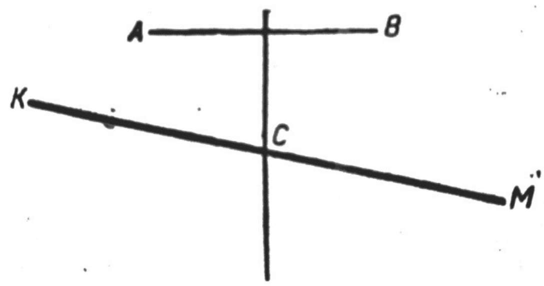


Рис. 2.4

Оскільки ГМТ, рівновіддалених від A і B, є симетраль цих точок, достатньо побудувати лише симетраль. Точка C – шукана (рис. 2.4). Задача не має розв'язків, якщо симетраль і пряма KM паралельні (рис.2.5). Задача має безліч розв'язків, якщо симетраль і пряма KM суміщаються.

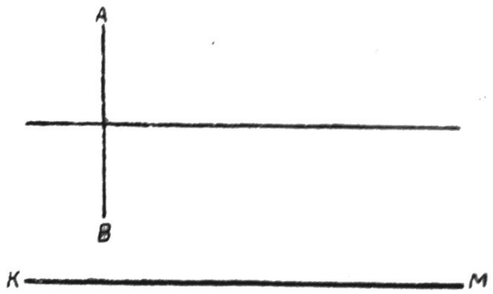


Рис. 2.5

Для самостійного розв'язання:

1. Побудувати трикутник за основою a, кутом A і медіаною m_a.

2. Побудувати трикутник за кутом A, основою a і точкою K перетину основи з бісектрисою внутрішнього кута при вершині A.

3. Побудувати трикутник за кутом A, основою a і медіаною m_b.

4. Побудувати трикутник за даним радіусом R описаного кола, радіусом r вписаного кола і одним з кутів A трикутника.

5. Побудувати трикутник за основою a, кутом A і висотою h_b.

6. Побудувати паралелограм за основою, кутом при перетині діагоналей та висотою.

7. Через дану точку A кола провести хорду, що дорівнює даному відрізку.

8. Через точку P, що лежить всередині даного кола, провести хорду, яка при перетині з даною хордою ділиться навпіл.

9. Дано два кола та їх спільну зовнішню дотичну. На цій дотичній знайти точки M так, щоб сума кутів, під якими видно дані кола з цієї точки, дорівнювала даному кутові α.

10. Дано дві паралельні прямі a, b і точку P між ними. Провести коло через точку P так, щоб воно дотикалося до даних прямих.

11. Побудувати трикутник за кутом A, основою a і радіусом r вписаного кола.

12. Побудувати трикутник за основою a, висотою h_a і сумою b^2+c^2.

13. Побудувати трикутник за основою a, кутом A і сумою b^2+c^2.

14. Побудувати трикутник за радіусом описаного кола R, кутом A і сумою b^2+c^2.

15. Побудувати трикутник за основою a, сумою b^2+c^2 і кутом C.

16. Побудувати трикутник за основою a, висотою h_a і різницею b^2-c^2.

17. Побудувати трикутник за основою a, медіаною m_a і різницею b^2-c^2.

18. Побудувати трикутник за основою a, кутом A і різницею b^2-c^2.

19. Побудувати трикутник за радіусом описаного кола a, кутом B і різницею b^2-c^2.

Практичне заняття № 3 з теми «Застосування паралельного перенесення при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання :

3. Побудувати паралелограм $ABCD$, якщо відомі його діагоналі AC і BD та кут CAD.

Аналіз. Припустимо, що шуканий паралелограм побудовано (рис.3.1). Виконуємо паралельне перенесення діагоналі BD на вектор $\overrightarrow{BC}$. Очевидно, трикутник ACM можна побудувати за сторонами AC, CM і кутом CAM.

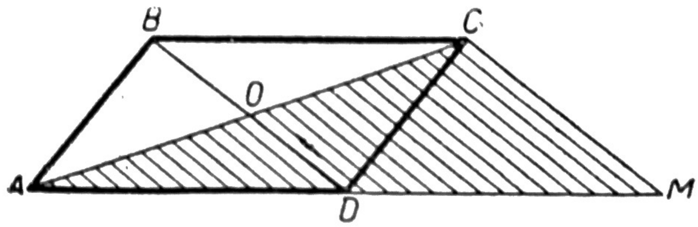


Рис. 3.1

Побудова.

4. Будуємо $\Delta\, ACM$ за сторонами AC, CM і кутом CAM.

5. Ділимо AM точкою D навпіл.

6. Знаходимо точку B як точку перетину двох кіл $\omega_1(C, AD)$ і $\omega_2(D, CM)$.

4. Побудувати чотирикутник за сторонами a, b, c і кутами α і β, прилеглими до четвертої сторони чотирикутника.

Аналіз. Нехай $ABCD$ – шуканий чотирикутник (рис. 3.2). Перенесемо сторону CD на вектор $\acute{C}B$. Тоді, очевидно, ламану ABK можна побудувати так: побудувати кут α, відкласти на одній стороні кута $AB=a$ і при точці B побудувати кут, що дорівнює $180°-(\alpha+\beta)$. Для знаходження точки K достатньо відкласти $BK=CD$. Точка D знаходиться як точка перетину AM і кола радіуса c з центром у точці K.

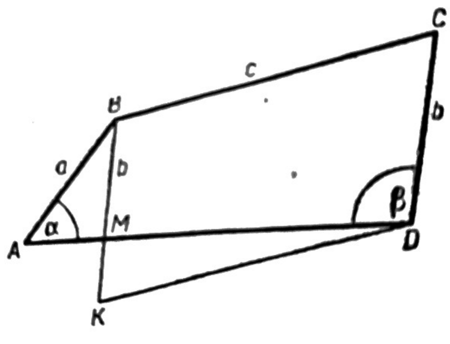


Рис. 3.2

Побудова.

7) Будуємо кут $BAM=\alpha$.

8) Відкладаємо $AB=a$.

9) З точки B проводимо пряму BM так, що $\angle\, ABM=180°-(\alpha+\beta)$.

10) Відкладаємо $BK=b$.

11) Проводимо з точки K коло радіуса c до перетину з продовженням AM. Дістанемо точку D.

12) Знаходимо точку C як точку перетину двох кіл: кола з центром у точці D і радіусом b; кола з центром у точці B і радіусом c.

Для самостійного розв'язання:

1. Побудувати трапецію за її сторонами a, b, c, d.
2. Побудувати трапецію за двома діагоналями, середньою лінією і одним з кутів при основі.
3. Побудувати трапецію за діагоналями та основами.
4. Побудувати трапецію за двома діагоналями, кутом між ними та основою.
5. Побудувати трикутник за трьома медіанами (рис.3.3).

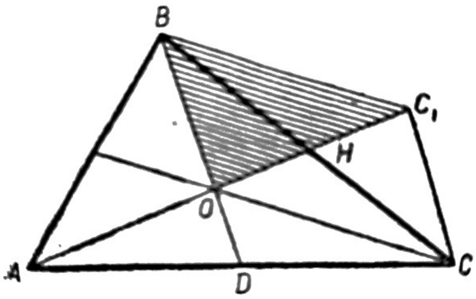


Рис. 3.3

6. Побудувати трикутник за його сторонами та кутом між протилежними сторонами (рис. 3.4).

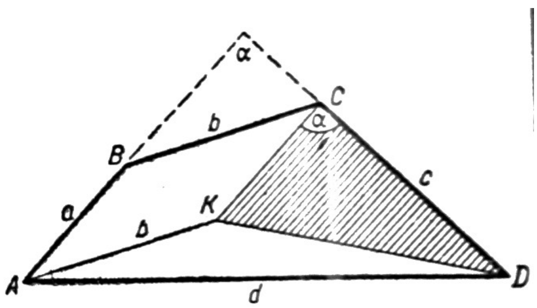


Рис. 3.4

7. Побудувати чотирикутник за трьома кутами та двома протилежними сторонами.
8. Побудувати трикутник за його двома діагоналями, двома протилежними сторонами та кутом між ними.

9. Побудувати чотирикутник за двома діагоналями, кутом між ними та двома протилежним сторонами.

Практичне заняття № 4 з теми «Застосування осьової симетрії при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання:

4. У трикутнику через вершину A і довільну точку D основи проведемо пряму AD. На цій прямій знайти таку точку M, з якої відрізки BD і CD було б видно під однаковими кутами.

Аналіз. Припустимо, що задача розв'язана і M – шукана точка (рис.4.1). Тоді $\angle AMB = \angle AMC$, тобто AM є бісектриса кута CMB. Отже, перпендикуляр, опущений з C на AM перетинає BM у точці C_1, симетричній точці C.

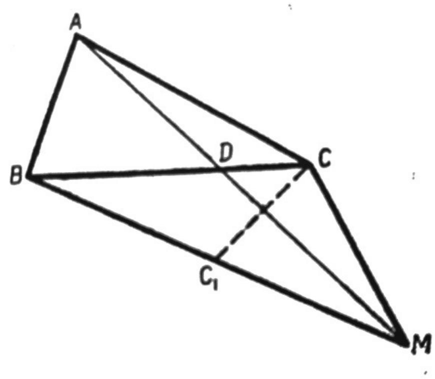


Рис. 4.1

Побудова.

3. Проводимо AD і будуємо точку C_1, симетричну C відносно AM.

4. Проводимо BC_1 та продовжуємо її до перетину з продовженням AM у точці M.

5. На основі трикутника ABC побудувати трикутник AB_1C, рівновеликий трикутнику ABC, але з найменшим периметром.

Аналіз. У зв'язку з тим, що геометричним місцем вершин трикутників, рівновеликих даному трикутнику ABC, є пряма DE, що проходить через точку B паралельно прямій AC, шукана вершина лежить на DE (рис. 4.2). Оскільки $BC = BC_1$, $AB + BC + AC = AB + BC_1 + AC$. Усі трикутники, що рівновеликі даному і задовольняють умові задачі, мають одну і ту ж основу AC, а тому периметр трикутника залежить лише від суми $AB + BC_1$. Легко бачити, що найменше значення суми буде в тому випадку, коли AB і BC_1 будуть знаходитись на одній прямій. Отже, шукана точка B_1 знаходиться на перетині прямої AC_1 і прямої DE.

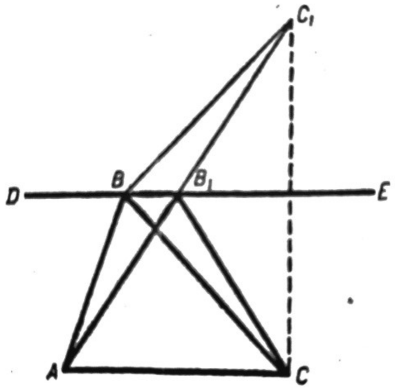


Рис. 4.2

Побудова.

1. Проводимо $DE \parallel AC$.
2. Будуємо точку C_1, симетричну точці C відносно DE.
3. Проводимо AC_1 і знаходимо точку B_1.

Доведення. Площа трикутника ABC дорівнює площі трикутника $A_1B_1C_1$. З іншого боку,

$$AB_1 + B_1C_1 + AC = AC + AB_1 + B_1C < AC + AB + BC.$$

6. Побудувати трикутник, знаючи положення його бісектрис та точки M на стороні AB.

Аналіз. Припустимо, що шуканий трикутник ABC побудовано. Проводимо бісектриси (рис. 4.3). З точки M проводимо перпендикуляр на бісектрису кута B. При перетині цього перпендикуляра з стороною BC одержимо точку M_1, симетричну точці M відносно бісектриси кута B. З точки M_1 опускаємо перпендикуляр на бісектрису кута C і одержуємо на стороні AC точку M_2, симетричну M_1 відносно бісектриси кута C. З M_2 опускаємо перпендикуляр на бісектрису кута A і на стороні AB одержимо точку M_3, симетричну M_2 відносно бісектриси кута A. Таким чином, знаючи точку M на стороні AB, завжди можна знайти точку M_3 на цій самій стороні або на її продовженні, тобто знайти напрям сторони AB шуканого трикутника.

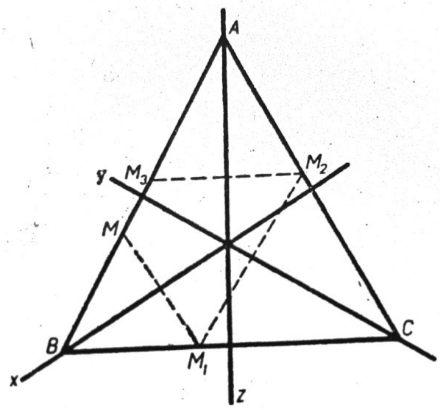


Рис. 4.3

Побудова.

1. Будуємо точку M_1, симетричну точці M відносно прямої x.
2. Будуємо точку M_2, симетричну точці M_1 відносно прямої y.
3. Будуємо точку M_3, симетричну точці M_2 відносно прямої z.
4. Через точки M і M_3 проводимо сторону AB.
5. Через точки A і M_2 проводимо AC.
6. Сполучаємо B і C.

Дослідження. Якщо одна з даних прямих перпендикулярна до іншої з даних прямих, то задача не має розв'язку. Якщо кожна з трьох даних прямих міститься всередині тупого кута, утвореного двома іншими прямими, то прямі будуть бісектрисами внутрішніх кутів трикутника. Якщо одна з прямих, наприклад x, знаходиться всередині гострого кута, що утворений прямими y і z, то y та z є бісектриси зовнішніх кутів трикутника.

Для самостійного розв'язання:

1. Побудувати трикутник, симетричний даному відносно його сторони.

2. Побудувати паралелограм, симетричний даному відносно бісектриси його тупого кута.

3. Побудувати трапецію, симетричну даній відносно середньої лінії

4. Дано три прямі, що перетинаються в одній точці і дають напрями бісектрис трикутника. На прямій x дано вершину A трикутника. Побудувати трикутник.

5. Дано коло і три прямі, що перетинаються в центрі кола. Побудувати трикутник так, щоб дані прямі були його бісектрисами і щоб він був описаний навколо даного кола.

6. Від рівнобедреного трикутника залишилася основа і точка K на бічній стороні. Побудувати трикутник.

7. Від рівнобедреного трикутника залишилася медіана основи і точка K на бічній стороні. Побудувати трикутник.

8. Від рівнобедреного трикутника залишилася точка на одній з бічних сторін, точка на середині основи та вершина при основі. Побудувати трикутник.

9. Від рівностороннього трикутника залишилася одна з вершин та дві точки, одна з яких лежить на прилеглій стороні, а друга – на протилежній. Побудувати трикутник.

10. Відновити форму ромба, якщо відома точка O перетину його діагоналей, одна з вершин A і точка K на прилеглій стороні.

11. Відновити форму ромба, якщо дано його дві протилежні вершини і відомо, що одна з решти вершин лежить на прямій.

12. Відновити форму квадрата, якщо дано його центр та середину сторони.

13. Відновити форму прямокутника, якщо дано точку перетину його діагоналей та середини двох його суміжних сторін.

14. Побудувати трикутник за двома сторонами b і c та різницею двох кутів B і C, що лежать проти цих сторін.

Практичне заняття № 5 з теми
«Застосування повороту при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання :

3. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник так, щоб вершина його прямого кута лежала в даній точці, а інші дві вершини – на даних колах з центрами O і O_2.

Аналіз. Припустимо, що задача розв'язана і шуканий трикутник ABC побудовано (рис. 5.1). Якщо вибрати за центр обертання точку A, то при обертанні на $90°$ точка B суміститься з точкою C. Отже, точку C можна знайти як точку перетину даного кола з центром O_2 і одержаного кола з центром O_1.

Побудова.

3. Обертаємо дане коло з центром у точціO навколо точки A на $90°$ і знаходимо точку C як точку перетину одержаного кола і даного кола з центром O.

4. Знаходимо точку B шляхом описування з точки A кола радіусом AC.

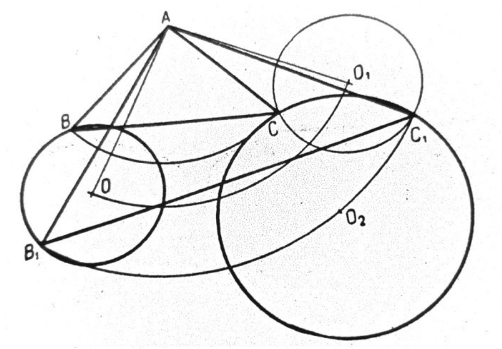


Рис. 5.1

Дослідження. Задача має два розв'язки, якщо побудоване коло перетинається з даними у двох точках (рис.5.1), один розв'язок, якщо ці кола дотикаються (рис.5.2), і не має жодного розв'язку, якщо кола не мають спільних точок (рис.5.3).

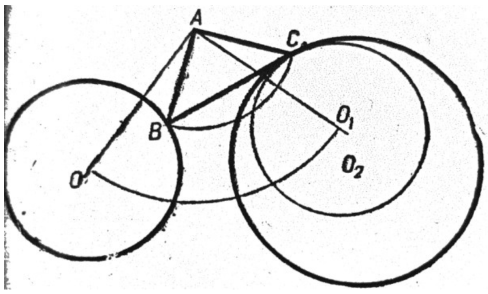


Рис. 5.2

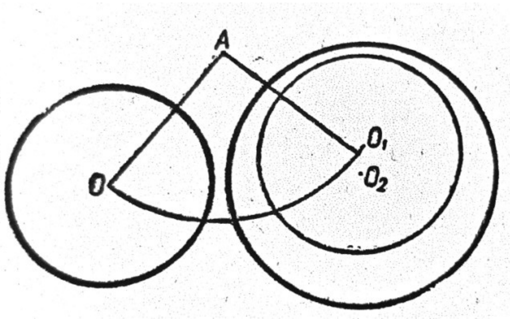


Рис. 5.3

4. Побудувати квадрат, якщо відома точка перетину його діагоналей і точки A і B на протилежних сторонах квадрата.

Аналіз. Нехай квадрат побудовано (рис. 5.4). Тоді, повернувши його навколо центра O на $180°$, дістанемо по дві точки ¿ і B¿ на кожній стороні квадрата. А це дає змогу швидко побудувати шукану фігуру.

Побудова.

1. Будуємо точки A_1 і B_1, відповідно симетричні точкам A і B відносно точки O.

2. Проводимо прямі AB_1 і A_1B_1.

3. Виконуємо обертання прямих AB_1 і A_1B навколо точки O на $90°$.

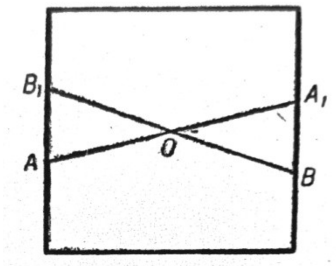


Рис. 5.4

Дослідження. Задача має один розв’язок, якщо A, O і B не розміщені на одній прямій. Якщо A, O і B розміщені на одній прямій, задача має безліч розв’язків при $AO = OB$ і не має розв’язків при $OA \neq OB$.

Для самостійного розв’язання :

1. Дано два рівні відрізки AB і A_1B_1. Знайти точку, навколо якої треба повернути AB, щоб одержати A_1B_1.

2. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та сумою катетів.

3. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та іншого катета.

4. Побудувати прямокутний трикутник за катетом a і різницею гіпотенузи та іншого катета.

5. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом та різницею катетів.

6. Побудувати квадрат за сумою сторони і діагоналі.

7. Побудувати квадрат за різницею діагоналі і сторони.

8. Побудувати ромб за його стороною та сумою діагоналей.

9. Побудувати трикутник за кутом A, стороною c і сумою $a+b$.

10. Побудувати прямокутник за діагоналлю та різницею сторін.

11. Дано два кола і точку A поза ними. Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб одна його вершина лежала в точці A, а інші – на колах

12. Дано коло, точку A і пряму a. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник так, щоб вершина його прямого кута лежала в точці A, а вершини гострих кутів – на колі і прямій.

13. Дано коло, точку A і пряму a. Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб його одна вершина лежала в точці A, а інші – на прямій і колі.

Практичне заняття № 6 з теми «Застосування гомотетії при розв'язуванні задач на побудову»

Аудиторні завдання :

4. Побудувати трикутник за двома його кутами A і C і висотою, опущеною з вершини третього кута.

Аналіз. Шуканий трикутник повинен задовольняти такі умови: 1) мати кути, що дорівнюють A і C; 2) мати висоту, що дорівнює даному відрізку a.

Трикутник, що задовольняє першу умову, легко побудувати, причому таких трикутників може бути безліч. Нехай ми побудували з них трикутник A_1BC_1 (рис. 6.1). Потрібний нам трикутник слід шукати серед трикутників, подібних побудованому. Трикутник A_1BC_1 відрізняється від шуканого лінійними елементами, зокрема висотою B. Зробимо тепер подібне перетворення побудованого трикутника з центром гомотетії B і коефіцієнтом $k=\frac{a}{BK_1}$, де a – даний відрізок (висота). Побудуємо точку K, гомотетичну точці K_1; проведемо через точку K пряму AC, парлельну A_1C_1. Трикутник ABC – шуканий.

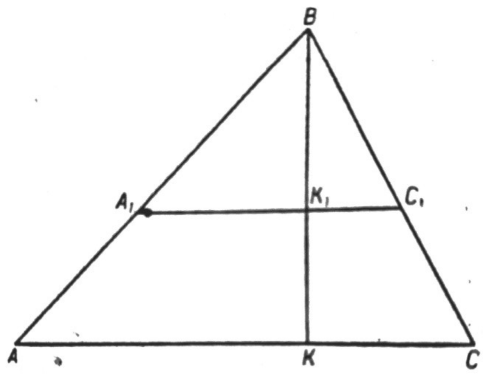


Рис. 6.1

Побудова.

5. Побудуємо довільний трикутник A_1BC_1, подібний до шуканого.
6. Будуємо висоту BK_1 цього трикутника.
7. На промені BK_1 знаходимо таку точку K, що $BK=a$.
8. Через точку K проводимо пряму AC, паралельну A_1C_1.

Доведення. Побудований трикутник є шуканим, бо він задовольняє обидві умови: 1) має кути, що дорівнюють даним; 2) має висоту, що дорівнює даному відрізку a.

Дослідження. Оскільки всі етапи побудови виконані однозначно, маємо один розв’язок. Інший спосіб приводить до цього ж розв’язку.

5. У даний гострокутний трикутник вписати квадрат так, щоб його дві вершини лежали на основі, а дві – на бічних сторонах.

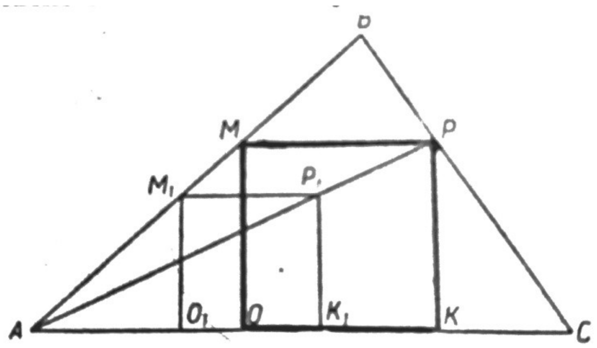


Рис. 6.2

Аналіз. Шуканий квадрат задовольняє три умови: 1) дві його вершини ¿ і K¿ лежать на стороні AC; 2) одна вершина (M) – на стороні AB; 3) одна вершина (P) – на стороні BC (рис. 6.2). Відкинемо третю умову і побудуємо квадрат $O_1M_1P_1K_1$ дві вершини якого лежать на стороні AC і одна вершина M_1 – на AB. Вибираємо за центр гомотетії точку A і перетворюємо квадрат $O_1M_1P_1K_1$ в квадрат $OMPK$, вершина P якого залежить стороні BC.

Побудова.

1. Будуємо квадрат $O_1M_1P_1K_1$ так, щоб дві його вершини лежали на стороні AC.

2. Вибираємо вершину A за центр гомотетії і знаходимо точку P, гомотетичну точці P_1.

3. Проводимо $MP \parallel M_1P_1$.

4. Проводимо $PK \perp AC$ і $MO \perp AC$.

Доведення. Із способу побудови безпосередньо випливає, що $OMPK$ – квадрат, бо $OMPK$ дістанемо як фігуру, гомотетичну квадратові $O_1M_1P_1K_1$.

6. Побудувати трикутник за двома кутами A і B та сумою протилежних до даних кутів сторін.

Аналіз. Форма трикутника визначається двома кутами. Побудуємо довільний трикутник A_1BC_1, подібний даному. Якщо зробити подібне перетворення побудованого трикутника, взявши за центр гомотетії вершину B, а за коефіцієнт гомотетії $k=\frac{a+c}{a_1+c_1}$, то одержимо шуканий трикутник ABC.

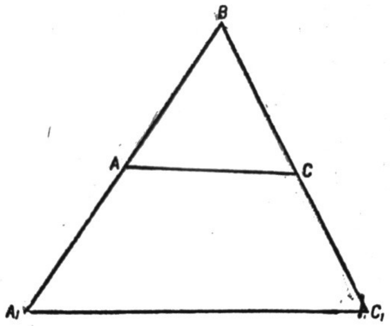


Рис. 6.3

Побудова.

1. Будуємо трикутник A_1BC_1, подібний даному (рис. 6.3)
2. Нехай $A_1B=c_1, BC_1=a_1$. Визначаємо відрізок a як четвертий пропорціональний $\frac{a+c}{a_1+c_1}=\frac{a}{\square}$ ¿ дано за умовою, $DE=A_1B+BC_1$ будуємо як суму сторін побудованого трикутника).
3. Відкладаємо $BC=a$ на BC_1.
4. Проводимо $AC \parallel A_1C_1$.

Для самостійного розв'язання :

1. Побудувати многокутник, подібний даному з коефіцієнтом гомотетії: а) $k=2$; б) $k=-2$. За центр гомотетії взяти: а) одну з вершин; б) точку зовні многокутника; в) точку всередину многокутника.
2. Побудувати коло, гомотетичне даному, знаючи центр гомотетії і точку, гомотетичну даній точці на даному колі.
3. Побудувати трикутник за відношенням двох його сторін, кутом, розміщеним між цими сторонами, та бісектрисою цього кута.
4. Побудувати трикутник за відношенням двох його сторін, кутом розміщеним між цими сторонами, та медіаною, проведеною до протилежної сторони.
5. Побудувати ромб за стороною a та відношенням діагоналей $b:c$.

6. Побудувати прямокутник за відношенням сторін $b:c$ та діагоналлю a.

7. Побудувати паралелограм за відношенням сторін $b:c$, кутом між ними та діагоналлю, що лежить проти цього кута.

8. Побудувати прямокутник за відношенням сторони до діагоналі $a:b$ та другою стороною c.

9. Побудувати трикутник за двома кутами A і B та медіаною, що виходить з третього кута.

10. Побудувати трикутник за двома кутами A і B та радіусом R описаного кола.

11. Побудувати трикутник за двома кутами A і B та радіусом r вписаного кола.

Практичне заняття № 7 з теми

«Алгебраїчний метод розв’язування конструктивних задач»

Аудиторні завдання:

Для самостійного розв’язання:

Побудувати формули:

1. $y=\sqrt{a}$.
2. $y=\sqrt[4]{a^4-b^4}$.
3. $y=\dfrac{a^5+b^3}{a^2}$.
4. $y=\sqrt[4]{a^3b-b^3a}$.
5. $y=\sqrt[4]{abck}$.
6. Побудувати квадрат, рівновеликий даному трикутнику.
7. Побудувати квадрат, площа якого в 3 рази менша від площі даного.
8. Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник, рівновеликий даному прямокутнику.

9. Побудувати квадрат, рівновеликий сумі площ двох даних прямокутників.

10. Поділити площу даного прямокутника прямою, паралельною діагоналі, у відношенні 1:3.

11. Поділити площу даного трикутника за допомогою прямої, що паралельна основі, у відношенні 1:2.

12. У квадрат із стороною a вписати рівносторонній трикутник так, щоб одна з вершин була спільна.

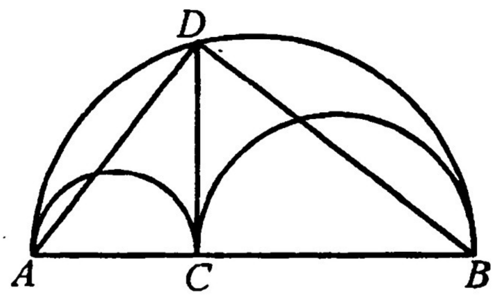
13. Побудувати рівносторонній трикутник, рівновеликий прямокутнику із сторонами a і $a\sqrt{3}$.

Практичне заняття № 8 з теми

«Планіметричні задачі на доведення»

Аудиторні завдання:

5. Довести, що якщо діаметр півкруга поділити на дві довільні частини і на кожній з них побудувати як на діаметрі півколо (всередині заданого півкруга), то площа, розташована між трьома півколами, дорівнює площі круга, діаметр якого дорівнює довжині перпендикуляра до діаметра півкруга, який проведено в точці поділу до перетину з колом.



Доведення.

Нехай R – радіус заданого півкруга, а r – радіус одного з побудованих півкругів. Тоді площа заданої фігури дорівнює

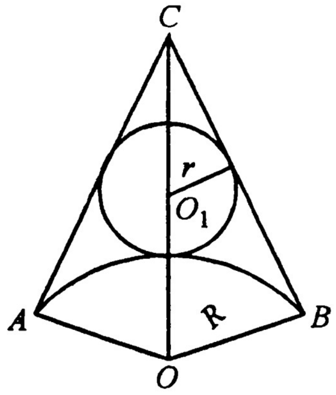
$0,5\left(\pi R^2-\pi r^2-\pi(R-r)^2\right)=\pi r(R-r)$.

Так як $\angle ADB=90°$, то

$$CD^2=AC*CB=2r*2(R-r)=4r(R-r),$$

звідки $\frac{\pi CD^2}{4}=\pi r(R-r)$, що і треба було довести.

6. Через кінці дуги кола, яка дорівнює $120°$, проведено дотичні, і в фігуру, обмежену цими дотичними і заданою дугою, вписане коло. Довести, що довжина вписаного кола дорівнює довжині заданої дуги.



Доведення. Нехай R – радіус дуги, r – радіус кола. Так як $\angle C=\frac{\pi}{3}$, то

$$R=\frac{1}{2}OC, r=\frac{1}{2}O_1C.$$

Тоді $OC=2R$; з іншої сторони,

$$OC=OO_1+O_1C=R+r+2r=R+3r,$$

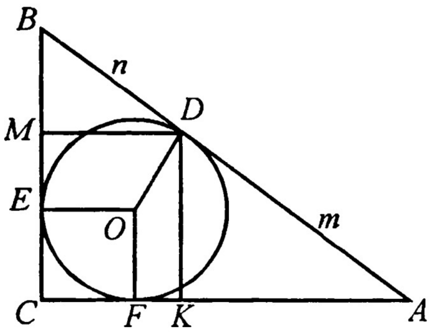
звідки $R=3r$. Отже,

$$l_{\cup AB}=2\frac{\pi R*1}{3}=2\frac{\pi*3r}{3}=2\pi r$$

7. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї з його сторін дорівнює відношенню висоти, проведеної до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.

Доведення. Для доведення скористаємось формулами $S=\frac{1}{2}ah_a$ та $r=\frac{S}{p}$.

8. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на відрізки довжиною m і n. Довести, що площа трикутника $S=mn$. Знайти площу прямокутника, вписаного в заданий трикутник так, що одна його вершина співпадає з вершиною прямого кута, а протилежна вершина – з точкою дотику кола і гіпотенузи.



Доведення. Нехай D, E, F – точки дотику; тоді $AD = AF = m, BD = CF = r$ – радіус вписаного кола, $p = r + m + n$ – півпериметр. Далі, використавши формулу $S = \frac{1}{2}ab$, знайдемо

$$S = \frac{(r+m)(r+n)}{2},$$

або

$$2S = r^2 + r(m+n) + mn = r(r+m+n) + mn = rp + mn.$$

Так як в якості рівності $r = \frac{S}{p}$, то $2S = S + mn$, звідки $S = mn$.

Нехай $CMDK$ – вписаний прямокутник. Оскільки $DK \parallel BC$, використовуючи гомотетію з центром в A і коефіцієнтом $k = \frac{m}{m+n}$, знайдемо площу S_1 трикутника ADK:

$$S_1 = \frac{S_{\triangle ABC} * m^2}{(m+n)^2} = \frac{m^3 n}{(m+n)^2}$$

Аналогічно для площі S_2 трикутника BDM маємо

$$S_2 = \frac{S_{\triangle ABC} * n^2}{(m+n)^2} = \frac{m n^3}{(m+n)^2}$$

Шукана площа

$$S_{CMDK} = mn - \frac{m^3 n + m n^3}{(m+n)^2} = \frac{2 m^2 n^2}{(m+n)^2}$$

Відповідь: $\frac{2m^2 n^2}{(m+n)^2}$.

Для самостійного розв'язання:

1. На відрізку AB взята точка C і на частинах AC, CB цього відрізка як на діаметрах побудовані півкола. Довести, що сума довжин цих півкіл не залежить від положення точки C на відрізку AB.

2. Довести, що з всіх прямокутників, вписаних в одне і те ж коло, найбільшу площу має квадрат.

Практичне заняття № 9 з теми «Стереометричні задачі на доведення»

Аудиторні завдання:

6. Дано декілька прямих, причому будь-які дві з них перетинаються. Довести, що або всі вони лежать в одній площині, або всі вони проходять через одну точку.

Доведення. Припустимо, що три задані прямі a, b і c не лежать на одній площині. Тоді пряма c може перетинати прямі a і b тільки в точці їх перетину. Якщо б пряма d перетинала прямі a, b і c в точках, відмінних від їх спільної точки, то прямі a, b і c лежали б в одній площині.

7. Нехай пряма l перетинає площину Π в точці O. Доведіть, що кут між прямою l і площиною Π – найменший з кутів між прямою l і прямими, розташованими в площині Π.

Доведення. Достатньо розглянути випадок, коли пряма m (відмінна від проекції прямої l на площину Π) розташована в площині Π і проходить через точку O. Нехай A – точка прямої l, відмінна від точки O, A' – проекція точки A на площину Π. Оберемо на прямій m точку B так, що $OA' = OB$. Зрозуміло, що $AB > AA'$, оскільки похила довше перпендикуляра. В трикутниках AOB і AOA' сторона AO спільна, $OB = OA'$ і $AB > AA'$, тому $\angle AOB > \angle AOA'$.

8. Доведіть, що пряма l утворює рівні кути з двома прямими, що перетинаються тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна одній з двох бісектрис кутів між цими прямими.

Доведення. Нехай $П$ – площина, яка містить задані прямі, що перетинаються. Випадок, коли пряма l перпендикулярна цій площині, очевидний, тому будемо вважати, що вони не перпендикулярні. Проекція l' прямої l на площину $П$ є однією з двох бісектрис між даними прямими. Пряма l' перпендикулярна іншій бісектрисі, а тому за теоремою про три перпендикуляри пряма l також перпендикулярна іншій бісектрисі.

9. Дано три прямі a, b і c, які попарно перетинаються і не паралельні одній площині. Доведіть, що існує єдиний відрізок, паралельний прямій c, кінці якого лежать на прямих a і b.

Доведення. Проведемо через пряму a площину $П$, паралельну прямій c. Ця площина перетинає пряму b в деякій точці B. Пряма, яка проходить через точку B паралельно прямій c, лежить в площині $П$, тому вона перетинає пряму a в деякій точці A. Відрізок AB шуканий.

10. Доведіть, що сума квадратів довжин проекцій ребер куба на будь-яку площину дорівнює $8a^2$, де a – довжина ребра куба.

Доведення. Нехай α, β і γ – кути між ребрами куба і прямою, перпендикулярно даній площині. Тоді довжини проекцій ребер куба на цю площину приймають значення $a\sin\alpha, a\sin\beta$ і $a\sin\gamma$, причому кожне значення приймається рівно 4 рази. Так як $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$. Тому шукана сума квадратів дорівнює $8a^2$.

Для самостійного розв'язання:

1. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не лежать водній площині. Відомо, що прямі AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1 попарно перетинаються.

а) Доведіть, що точки перетину цих прямих лежать на одній прямій.

б) Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці або паралельні.

2. У просторі задано дві площини, що перетинаються α і β. На лінії їх перетину дано точку A. Доведіть, що з усіх прямих, які лежать в площині α і проходять через точку A, найбільший кут з площиною β утворює та, яка перпендикулярна до лінії перетину площин α і β.

3. Площини Π_1 і Π_2 перетинаються по прямій l. У цих площинах вибрані точки A_1 і A_2. Доведіть, що пряма A_1A_2 утворює рівні кути з площинами Π_1 і Π_2 тоді і тільки тоді, коли точки A_1 і A_2 рівновіддалені від прямої l.

4. Дано три прямі, які попарно перетинаються. Доведіть, що існує єдиний паралелепіпед, три ребра якого лежать на цих прямих.

5. Доведіть, що відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2 дорівнює довжині їх спільного перпендикуляра A_1A_2.

6. Доведіть, що сума квадратів довжин проекцій ребер правильного тетраедра на будь-яку площину дорівнює $4a^2$, де a – довжина ребра тетраедра.

Практичне заняття № 10 з теми
«Застосування тригонометрії при розв'язуванні геометричних задач»

Аудиторні завдання :

6. Сума двох різних висот рівнобедреного трикутника дорівнює l, кут при вершині дорівнює α. Знайдіть бічну сторону.

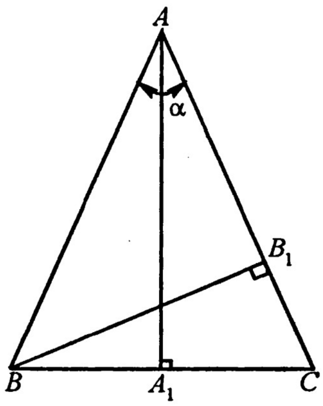


Рис. 10.1

Розв'язання. За умовою $AB=AC, AA_1\perp BC, BB_1\perp AC, \angle BAC=\alpha, AA_1+BB_1=l$(рис.10.1). Нехай $BC=a$. З ΔAA_1C знаходимо

$$AA_1=\frac{\alpha}{2}ctg\frac{\alpha}{2}, AC=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

а з ΔBB_1C отримаємо

$$BB_1 = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\text{¿}\right) = a\cos\frac{\alpha}{2}\text{¿}.$$

Використовуючи умову, маємо

$\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\alpha}{2} + a\cos\frac{\alpha}{2} = l$,або

$\frac{\alpha}{2} ctg\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = l$,тобто

$$a = \frac{2l\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Отже, знайдемо

$$AC = \frac{l\,tg\frac{\alpha}{2}}{\left(1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha} = \text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\text{¿}\right) + \sin\alpha = \frac{l}{2\sin\frac{\pi + \alpha}{4}\cos\frac{\pi - 3\alpha}{4}}\text{¿}}$$

7. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, кут при вершині дорівнює α. Знайти довжину бісектриси, яка проведена до бічної сторони.

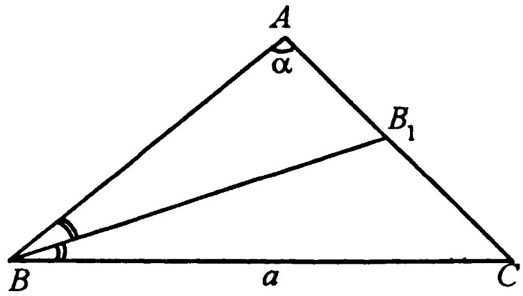


Рис. 10.2

Розв'язання. За умовою, $AB = AC, BC = a, \angle BAC = \alpha$, $\angle ABB_1 = \angle B_1BC$ (рис. 10.2). Маємо

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}, \angle B_1BC = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4},$$

$$\angle BB_1C = \pi - \left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{4}.$$

З ΔBB_1C за теоремою синусів знаходимо

$$\frac{BB_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)}$$’тобто

$$BB_1=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)}.$$

8. Кут при основі гострокутного рівнобедреного трикутника $ABC(AB=BC)$ дорівнює α. У якому відношенні, рахуючи від вершини A, висота BD ділить висоту AE?

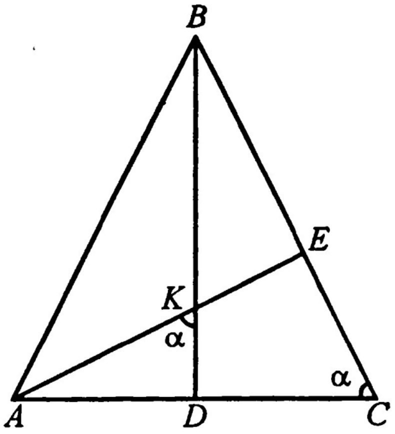


Рис. 10.3

Розв’язання. Згідно умови, ΔABC – гострокутний; тобто, точка K перетину висот знаходиться всередині трикутника (рис. 10.3). Нехай $AD=a$.

З ΔAEC і ΔAKD знайдемо $AE=2a\sin\alpha, AK=\frac{a}{\sin\alpha}$¿, так як два кути доповнюють кут KAD до $90°$). Далі маємо

$$KE=AE-AK=2a\sin\alpha-\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{a(2\sin^2\alpha-1)}{\sin\alpha}=\frac{-a\cos2\alpha}{\sin\alpha}$$

Отже, отримаємо

$$\frac{AK}{KE}=\frac{-a}{\sin\alpha}:\frac{a\cos2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-1}{\cos2\alpha}$$

9. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з бічним ребром кут α. Знайти об’єм паралелепіпеда, якщо периметр його основи дорівнює P.

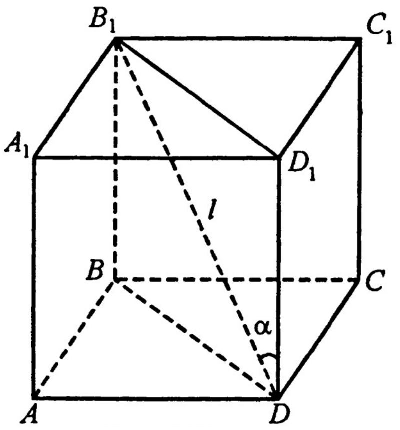


Рис. 10.4

Розв'язання. За умовою $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $B_1D=l$, $\angle B_1DD_1=\alpha$, $P_{ABCD}=P$ (рис. 10.4). З ΔB_1D_1D знайдемо $DD_1=l\cos\alpha$, а $D_1B_1=DB=l\sin\alpha$. Покладемо $AB=x, AD=y$; тоді дійдемо до наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+2y=P, x+y=\dfrac{P}{2}, x^2+2xy+y^2=\dfrac{P^2}{4} \\ x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha, x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha, x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha, \end{cases}$$

Віднявши з першого рівняння друге, отримаємо

$$xy=\frac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}$$

Отже,

$$V_{пар}=\frac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}\cdot l\cos\alpha=\frac{l\left(P^2-4l^2\sin^2\alpha\right)\cos\alpha}{8}$$

10. Основа призми – рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, протилежної даному куту, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

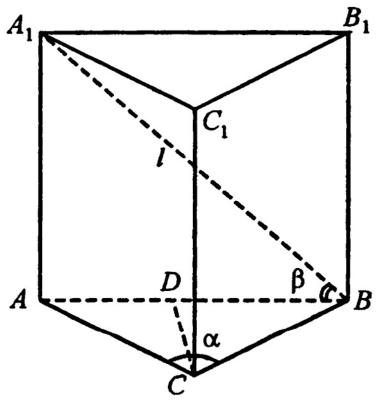


Рис. 10.5

Розв'язання. За умовою $ABC\,A_1B_1C_1$ – пряма призма, $AC=CB, \angle\ ACB=\alpha, A_1B=l, \angle\ A_1BA=\beta$ (рис. 10.5), треба знайти $V_{пр}=S_{\Delta ABC}\cdot A_1A$. З ΔA_1AB знаходимо

$$A\,A_1=l\sin\beta,\ AB=l\cos\beta,$$

а з ΔADC отримаємо

$$DC=AD\,ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}l\cos\beta\,ctg\frac{\alpha}{2}.$$

Звідси,

$$V_{пр}=\frac{1}{2}l\cos\beta\cdot\frac{1}{2}l\cos\beta\,ctg\frac{\alpha}{2}\cdot l\sin\beta=¿$$

$$¿\frac{1}{4}l^3\cos^2\beta\,ctg\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta=\frac{1}{8}l^3\sin2\beta\cos\beta\,ctg\frac{\alpha}{2}$$

Для самостійного розв'язання:

1. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює S, а протилежний до основи кут між медіанами, які проведені до його бічних сторін, дорівнює α. Знайти основу.

2. Показати, що якщо в трикутнику відношення тангенсів двох кутів трикутника дорівнює відношенню квадратів синусів цих же кутів, то трикутник рівнобедрений або прямокутний.

3. У квадрат $ABCD$ вписано рівнобедрений трикутник AEF; точка E лежить на стороні BC, точка F – на стороні CD і $AE=AF$. Тангенс кута AEF дорівнює 3. Знайти косинус кута FAD.

4. Дві висоти паралелограма, які проведено з вершини тупого кута, дорівнюють h_1 і h_2, а кут між ними дорівнює α. Знайти більшу діагональ паралелограма.

5. Із вершини C ромба $ABCD$, сторона якого дорівнює a, проведено два відрізки CE і CF, які ділять ромб на три рівновеликі фігури. Відомо, що $\cos C=\frac{1}{4}$. Знайти суму $CE+CF$.

6. Висота рівнобедреної трапеції дорівнює h, а кут між її діагоналями, протилежний бічній стороні, дорівнює α. Знайти середню лінію трапеції.

7. Висота рівнобедреної трапеції дорівнює h. Верхню основу трапеції видно з середини нижньої основи під кутом 2α, а нижню основу з середини верхньої – під кутом 2β. Знайти площу трапеції в цьому спільному випадку і обчислити її без таблиць, якщо $h=2, \alpha=15°, \beta=75°$.

8. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a. Кут між діагоналями двох суміжних бічних граней дорівнює α. Знайти об'єм призми.

9. Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює стороні основи. Знайти кут між стороною основи і діагоналлю, яка не перетинає бічні грані.

Практичне заняття № 11 з теми «Метод координат при розв'язуванні геометричних задач»

Аудиторні завдання:

5. Дано трикутник ABC; BD – медіана, $\angle DBC=90°, BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайти $\angle ABD$.

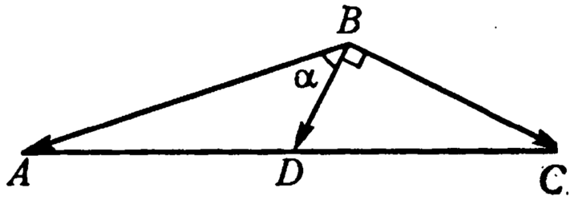


Рис. 11.1

Розв'язання. За умовою,

$$\angle DBC=90°, BD=\frac{\sqrt{3}}{4}AB, AD=DC$$

(рис.11.1); потрібно знайти $\angle ABD=\alpha$. Для знаходження кута α будемо використовувати формулу

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BD}}{|\vec{BA}||\vec{BD}|}$. Так як BD – медіанаΔABC, то $\vec{BD}=\dfrac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})$, звідси $\vec{BA}=2\vec{BD}-\vec{BC}$. Тобто,

$$\cos\alpha=\frac{(2\vec{BD}-\vec{BC})\vec{BD}}{|\vec{BA}||\vec{BD}|}=\frac{2BD^2-\vec{BC}\cdot\vec{BD}}{|\vec{BA}||\vec{BD}|}.(11.1)$$

Але $\vec{BC}\perp\vec{BD}$, тобто $\vec{BC}\cdot\vec{BD}=0$, а з рівності $BD=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$ випливає, що $AB=\dfrac{4}{\sqrt{3}}BD$. Тоді рівність (11.1) матиме вигляд

$$\cos\alpha=\frac{2BD^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}BD^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \textit{звідки } \alpha=30°$$

Відповідь: $30°$.

6. Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (вершини основи $ABCD$ розташовані за годинниковою стрілкою); K – середина ребра AA_1; H – середина ребра AD; M – центр грані CC_1D_1D. Довести, що пряма KM перпендикулярна прямій B_1H.

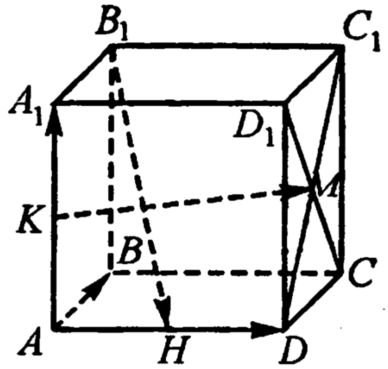


Рис. 11.2

Доведення. Нехай $\vec{AD}=\vec{a}, \vec{AB}=\vec{b}, \vec{AA_1}=\vec{c}$ (рис. 11.2). Знайдемо розклад $\vec{B_1H}$ і $\vec{KM}$ за векторами $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$. Маємо

$$\vec{B_1H}=\vec{B_1A_1}+\vec{A_1A}+\vec{AH}=-\vec{b}--\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}, \vec{KM}=\vec{KA_1}+\vec{A_1D_1}+\vec{D_1M};$$

так як $\vec{D_1M}=\dfrac{1}{2}\vec{D_1C}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})$, то

$$\vec{KM}=\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

Відповідно,

$$\vec{B_1'H} \cdot \vec{KM} = \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right)\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(a^{-2} - b^{-2}\right) = 0,$$

оскільки $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Отже, $\vec{B_1'H} \perp \vec{KM}$. Доведено.

7. У паралелограмі $ABCD$ – дано: $M \in BC$ і $BM : MC = 1:2; N \in DC, DN : NC = 1:2; \vec{AM} = \vec{a}; \vec{AN} = \vec{b}$. Виразити вектори $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{MN}$ і $\vec{BD}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

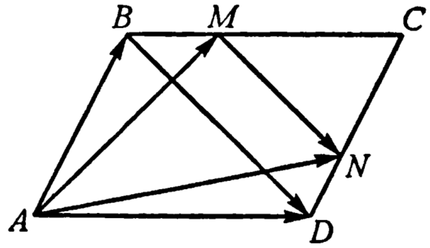


Рис. 11.3

Розв'язання. За умовою, $\vec{AM} = \vec{a}; \vec{AN} = \vec{b}$ (рис. 11.3) і, отже,

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = ¿\,\vec{b} - \vec{a}.$$

Так як

$$\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}, \frac{DN}{NC} = \frac{1}{2}, \text{ то } \frac{MC}{BC} = \frac{2}{3}, \frac{NC}{CD} = \frac{2}{3}$$

і кут C – спільний у трикутників NCM і DCB. Відповідно, $\Delta NCM \ \ \Delta DCB$, звідси $\frac{MN}{BD} = \frac{2}{3}$ і $\vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{MN}$, тобто $\vec{BD} = \frac{3}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$. Нехай $\vec{AD} = \vec{x}, \vec{AB} = \vec{y}$. Маємо $\vec{AD} - \vec{AB} = \vec{BD}$, або

$$\vec{x} - \vec{y} = \frac{3}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right). (1)$$

Далі,

$$\vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AM}, \text{ або } \vec{y} + \frac{1}{3}\vec{x} = \vec{a} (2)$$

Залишається розв'язати систему рівнянь (1) і (2); у результаті отримаємо

$$\vec{AD} = \frac{9}{8}\vec{b} - \frac{3}{8}\vec{a}, \vec{AB} = \frac{9}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}.$$

Відповідь:

$$\vec{AB} = \frac{9}{8}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}, \vec{AD} = \frac{9}{8}\vec{b} - \frac{3}{8}\vec{a}, \vec{MN} = \vec{b} - \vec{a}, \vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}.$$

8. Дано два відрізки AB і CD. Довести, що якщо $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$, то $AB \perp CD$. Чи справедливе зворотне твердження?

Доведення. Розглянемо вектори $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BD}, \vec{BC}$. У залежності від їх взаємного розташування можемо отримати плоску або просторова фігура (рис. 11.4). Враховуючи, що

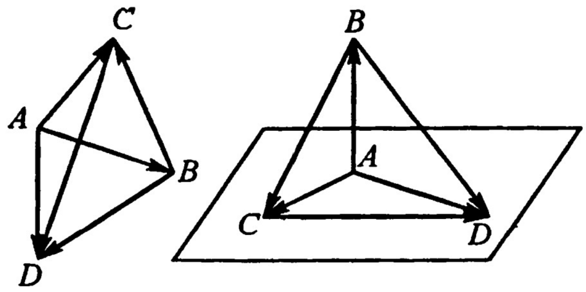


Рис. 11.4

$\vec{AB}^2=|\vec{AB}|^2=AB^2$, перетворимо дану рівність наступним чином:

$$\vec{BD}^2-\vec{BC}^2=\vec{AD}^2-\vec{AC}^2$$

$$\underbrace{(\vec{BD}-\vec{BC})}_{\vec{CD}}(\vec{BD}+\vec{BC})=\underbrace{(\vec{AD}-\vec{AC})}_{\vec{CD}}(\vec{AD}+\vec{AC})$$

$\vec{CD}$¿¿

а це і означає, що $\vec{AB} \perp \vec{CD}$.

Виконуючи перетворення «від кінця до початку» ¿ або $-2\vec{AB}\cdot\vec{CD}=0$, або $\vec{CD}(\vec{BD}+\vec{DA}+\vec{BC}+\vec{CA})=0$ і т.д.), переконуємось в тому, що справедливе і зворотне твердження.

Для самостійного розв'язання :

1. У трикутнику ABC точка N лежить на стороні AB і $AN=3NB$; медіана AM перетинається з CN в точці O. Знайти AB, якщо $AM=CN=7$ см і $\angle NOM=60°$.

2. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ довжина кожного ребра дорівнює a. Точка $M \in SC$ і $SM:MC=2:1$. Знайти кут між векторами $\vec{DC}$ і $\vec{AM}$.

3. У трикутнику ABC дано: $AB=BC; D$ – середина сторони $AC; DK$ перпендикулярна BC; точка M – середина відрізка DK. Довести, що прямі AK і BM перпендикулярні.

4. У коло вписано трикутник ABC. Пряма, яка містить медіану CC_1 трикутника, перетинає коло вдруге у точці D. Довести, що $CA^2+CB^2=2CC_1\cdot CD$.

Практичне заняття № 12 з теми «Векторний метод при розв'язуванні геометричних задач»

Аудиторні завдання :

5. Знайти одиничний вектор, колінеарний вектору, направленому по бісектрисі кута BAC трикутника ABC, якщо задані його вершини: $A(1;1;1), B(3;0;1), C(0;3;1)$.

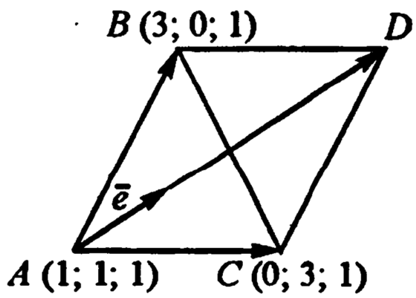


Рис. 12.1

Розв'язання. Знайдемо координати і модулі векторів $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$; маємо $\vec{AB}(2;-1;0), \vec{AC}(-1;2;0)$.

$$|\vec{AB}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{5}, |\vec{AC}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$$

Так як $|\vec{AB}|=|\vec{AC}|$, то $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}$ є діагоналлю ромба $ABCD$ (рис. 12.1), і відповідно – бісектрисою кута BAC. Маємо

$$\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}=(2;-1;0)+(-1;2;0)=(1;1;0)$$

і $|\vec{AD}|=\sqrt{2}$. Нехай $\vec{e}$ – одиничний вектор, співнапрямний з вектором $\vec{AD}$, тобто $\vec{e}=\frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|}$. Тоді, використовуючи формулу $\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ отримаємо $\vec{e}\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

6. Дано вектор $\vec{a}(1;-2;5)$. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який лежить в площині xOy і перпендикулярний вектору $\vec{a}$, якщо $|\vec{b}|=2\sqrt{5}$.

Розв'язання. Так як вектор $\acute{b} \in xOy$, то він має координати $(x;y;0)$. Використовуючи умову $|\acute{b}|=2\sqrt{5}, \acute{b} \perp \acute{a}$, складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x-2y=0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, отримаємо два вектори $(4;2;0)$ і $(-4;-2;0)$.

Відповідь: $(4;2;0)$ або $(-4;-2;0)$

7. Скласти рівняння кола, описаного навколо трикутника, який утворюють прямі $y=0,2x-0,4$; $y=x+2$; $y=8-x$.

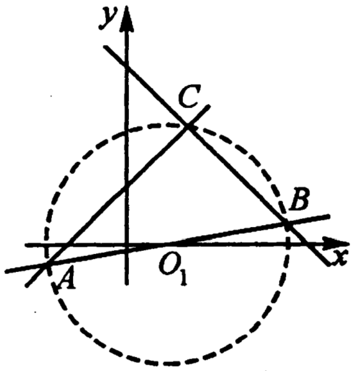


Рис. 12.2

Розв'язання. Кутові коефіцієнти прямих $y=x+2$ і $y=8-x$ дорівнюють відповідно $k_1=1$ і $k_2=-1$. Так як $k_1 k_2=-1$, то виконується умова $k_1 k_2=-1$ (рис. 12.2) перпендикулярності прямих; тобто, $\triangle ABC$ – прямокутний і центром кола є середина його гіпотенузи AB. Знайдемо точки перетину прямої $y=0,2x-0,4$ з прямими $y=x+2$ і $y=8-x$; розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} y=0,2x-0,4, \\ y=x+2 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} y=0,2x-0,4, \\ y=8-x, \end{cases}$$

отримаємо точки $A(-3;-1)$ і $B(7;1)$ – кінці гіпотенузи. Використовуючи формули $x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}$, знайдемо координати центра кола: $O_1=(2;0)$. У зв'язку з формулою

$$A_1A_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

радіус кола є

$$R=O_1A=\sqrt{(-3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{26}\ .$$

Згідно формулі $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, отримаємо шукане рівняння кола $(x-2)^2+y^2=26$.

Відповідь: $(x-2)^2+y^2=26$.

8. У трапеції $ABCD$ задано: вершина $A(3;0)$, середина основи AB – точка $E(6;-1)$, середина основи CD – точка $F(7;2)$. Бічна сторона BC паралельна Oy. Довести, що трапеція рівнобедрена, і знайти кут при основі.

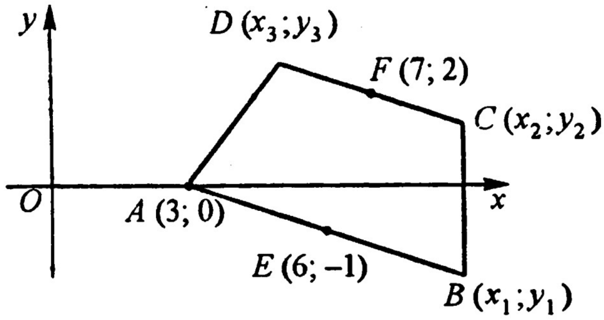


Рис. 12.3

Доведення. Нехай $B(x_1;y_1), C(x_2;y_2), D(x_3;y_3)$ – невідомі вершини трапеції (рис. 12.3). Оскільки точка $E(6;-1)$ – середина основи AB, маємо систему $\frac{3+x_1}{2}=6, \frac{0+y_1}{2}=-1$, звідки $x_1=9, y_1=-2$, тобто $B(9;-2)$. Але $BC \parallel Oy$ і, отже, $x_2=9$, а рівнянням BC є $x=9$. Далі, точка $F(7;2)$ – середина основи DC, звідки $\frac{x_3+9}{2}=7$, тобто $x_3=5$. Рівняння прямої AB має вигляд

$$y+1=k(x-6);$$

так як $A\in(AB)$, то $0+1=k(3-6)$ $k=\frac{-1}{3}$. Тому $k_{DC}=\frac{-1}{3}$ і отримаємо рівняння DC:

$$y-2=\frac{-1}{3}(x-7), або\ y=\frac{-1}{3}x+\frac{13}{3}$$

Розв’язавши систему рівнянь прямих BC і DC, тобто $x=9$ і $y=\frac{-1}{3}x+\frac{13}{3}$, знайдемо $y=\frac{4}{3}$, тобто $C(9;\frac{4}{3})$. Ординату точки D знайдемо з рівності $\frac{y_3+\frac{4}{3}}{2}=2$, звідки $y_3=\frac{8}{3}$, тобто $D(5;\frac{8}{3})$. Таким чином,

$BC = y_2 - y_1 = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$, $AD = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$, тобто $BC = AD$ і, отже, трапеція $ABCD$ – рівнобедрена.

Покладемо $\angle DAB = \alpha$ і скористаємось формулою $\cos\alpha = \frac{\vec{AD} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AD}||\vec{AB}|}$.

Маємо $\vec{AD}\left(3; \frac{8}{3}\right), \vec{AB} = (6; -2), |\vec{AB}| = 2\sqrt{10}$ і, відповідно,

$$\cos\alpha = \frac{2 \cdot 6 + \frac{8}{3}(-2)}{\frac{10}{3} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Відповідь: $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Для самостійного розв’язання:

1. У паралелограмі $OABC$ задані вершини $O(0;0), A(3;6)$ і $B(8;6)$. Знайти відношення довжин діагоналей OB і AC, а також скласти рівняння сторін паралелограма і діагоналі AC.

2. Дано три точки $A(2;1), B(3.-1), C(-4;0)$, які є вершинами рівнобедреної трапеції $ABCD$. Знайти координати точки D, якщо $\vec{AB} = k\vec{CD}$.

3. Довжини діагоналей AC і BD ромба дорівнюють 15 і 8 см. Перша діагональ напрямлена вздовж осі Ox, друга – вздовж осі Oy. Скласти рівняння сторін ромба і знайти відстань від початку координат до сторони ромба.

4. Знайти координати вершин C і D квадрата $ABCD$, якщо $A(2;1), B(4;0)$.

Додаток Б

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ПОГОДЖЕНО	ЗАТВЕРДЖЕНО
Завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу	Проректор з навчальної та науково-педагогічної роботи
________ Таточенко В.І.	____ проф. Тюхтенко Н.А.

Завдання

комплексної контрольної роботи з основ геометрії

для студентів 3 курсу

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Варіант № 1

1. Побудувати трапецію за її сторонами a, b, c, d.
2. Від рівнобедреного трикутника залишилася основа і точка K на бічній стороні. Побудувати трикутник.
3. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та іншого катета.
4. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не лежать водній площині. Відомо, що прямі AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1 попарно перетинаються. Доведіть, що точки перетину цих прямих лежать на одній прямій.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ПОГОДЖЕНО	ЗАТВЕРДЖЕНО
Завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу	Проректор з навчальної та науково-педагогічної роботи
________ Таточенко В.І.	____ проф. Тюхтенко Н.А.

Завдання

комплексної контрольної роботи з основ геометрії

для студентів 3 курсу

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Варіант № 2

1. Побудувати трапецію за діагоналями та основами
2. Від рівнобедреного трикутника залишилася медіана основи і точка K на бічній стороні. Побудувати трикутник.
3. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом та різницею катетів.
4. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не лежать водній площині. Відомо, що прямі AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1 попарно перетинаються. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці або паралельні.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ПОГОДЖЕНО	**ЗАТВЕРДЖЕНО**
Завідувач кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу	Проректор з навчальної та науково-педагогічної роботи
________ Таточенко В.І.	____ проф. Тюхтенко Н.А.

Завдання

комплексної контрольної роботи з основ геометрії

для студентів 3 курсу

спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Варіант № 3

1. Побудувати трапецію за двома діагоналями, середньою лінією і одним з кутів при основі.
2. Від рівнобедреного трикутника залишилася точка на одній з бічних сторін, точка на середині основи та вершина при основі. Побудувати трикутник.
3. Побудувати прямокутний трикутник за катетом a і різницею гіпотенузи та іншого катета.
4. У просторі задано дві площини, що перетинаються α і β. На лінії їх перетину дано точку A. Доведіть, що з усіх прямих, які лежать в площині α і проходять через точку A, найбільший кут з площиною β утворює та, яка перпендикулярна до лінії перетину площин α і β.

Додаток В
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ

Самостійна робота № 1
з теми «Планіметричні задачі на побудову»

Варіант 1

1. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та різницею гострих кутів.
2. Побудувати трикутник за основою a, кутом A і висотою h_b.
3. Побудувати трикутник за відношенням двох його сторін, кутом, розміщеним між цими сторонами, та бісектрисою цього кута.
4. Побудувати квадрат, рівновеликий даному трикутнику.

Варіант 2

1. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею гострих кутів.
2. Побудувати паралелограм за основою, кутом при перетині діагоналей та висотою.
3. Побудувати трикутник за відношенням двох його сторін, кутом розміщеним між цими сторонами, та медіаною, проведеною до протилежної сторони.
4. Побудувати квадрат, площа якого в 3 рази менша від площі даного

Самостійна робота № 2
з теми «Різні методи розв’язування планіметричних та стереометричних задач»

Варіант 1

1. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює S, а протилежний до

основи кут між медіанами, які проведені до його бічних сторін, дорівнює α. Знайти основу.

2. У трикутнику ABC точка N лежить на стороні AB і $AN=3NB$; медіана AM перетинається з CN в точці O. Знайти AB, якщо $AM=CN=7$ см і $\angle NOM=60°$.

3. У паралелограмі $OABC$ задані вершини $O(0;0), A(3;6)$ і $B(8;6)$. Знайти відношення довжин діагоналей OB і AC, а також скласти рівняння сторін паралелограма і діагоналі AC.

Варіант 2

1. Показати, що якщо в трикутнику відношення тангенсів двох кутів трикутника дорівнює відношенню квадратів синусів цих же кутів, то трикутник рівнобедрений або прямокутний.

2. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ довжина кожного ребра дорівнює a. Точка $M \in SC$ і $SM:MC=2:1$. Знайти кут між векторами $\acute{DC}$ і $\acute{AM}$.

3. Дано три точки $A(2;1), B(3.-1), C(-4;0)$, які є вершинами рівнобедреної трапеції $ABCD$. Знайти координати точки D, якщо $\acute{AB}=k\acute{CD}$.

Додаток Г

ОРІЄНТОВНИЙ ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ ДО ЕКЗАМЕНУ / ЗАЛІКУ

1. Евклідові та неевклідові геометрії.
2. Геометрія до Евкліда. "Початки" Евкліда.
3. Критика системи Евкліда. V постулат.
4. Лобачевський та його геометрія. Аксіома Лобачевського.
5. Система аксіом Гільберта.
6. Елементи сферичної геометрії.
7. Основні факти геометрії Лобачевського. Паралельні прямі та їх властивості.
8. Розбіжні прямі та їх властивості. Кут паралельності на площині Лобачевського.
9. Коло, еквідистанта та орицикл.
10. Поняття про математичну структуру. Ізоморфізм.
11. Поняття про інтерпретацію системи аксіом.
12. Несуперечливість, незалежність та повнота системи аксіом. Приклади.
13. Несуперечливість та повнота системи аксіом Вейля тривимірного евклідового простору.
14. Означення прямих, площин, променів, відрізків, кутів.
15. Теорія вимірювання. Довжина відрізка, аксіоми.
16. Теореми існування та єдиності.
17. Площа многокутника, аксіоми. Теорема існування та єдиності.
18. Рівновеликість та рівноскладеність.
19. Теорія об‘ємів.